Županijsko natjecanje iz fizike 2025./2026.

Srednje škole – 1. skupina

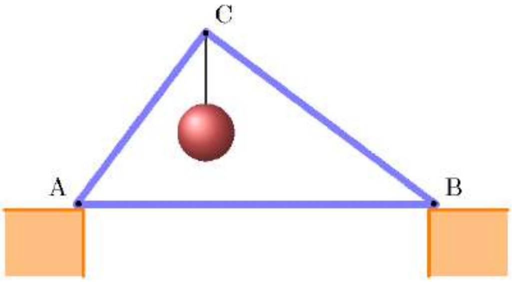
VAŽNO: Tijekom ispita učenici ne smiju imati nikakav pisani materijal (knjige, bilježnice, formule i dr.). Za pisanje treba se koristiti kemijskom olovkom ili nalivperom. Učenici pri ruci ne smiju imati mobitel ni druge elektroničke uređaje osim kalkulatora.

1. zadatak (10 bodova)

Biciklist prelazi 2 jednaka brda u nizu, vozeći jednoliko uz i niz brda, redom brzinama: 8 m/s, 16 m/s, 4 m/s i 16 m/s. Putevi uz brdo i niz brdo iste su duljine. Odredite srednju brzinu biciklista.

2. zadatak (10 bodova)

Teret težine 500 N obješen je sajlom zanemarive mase o vrh C nosača, koji čine tri nesavitljive šine, zanemarivih masa, povezane s tri glatka zglobna klina u trokut ABC, kao na slici. Horizontalna šipka AB duga je 50 cm, a kose šipke $|AC| = 30$ cm i $|BC| = 40$ cm. Trenja su zanemariva. Sustav je u ravnoteži. Koliko iznose reakcije podloga u točkama oslonca A i B te sila koju šina AC prenosi na oslonac u točki A?



3. zadatak (10 bodova)

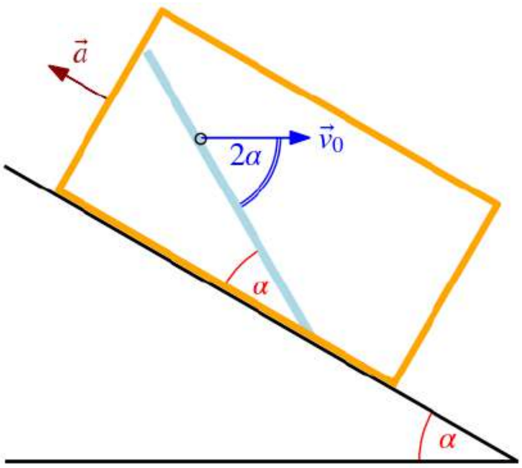
Jednaki automobili poredani su od startne linije jedan iza drugoga međusobno razmaknuti za polovicu duljine automobila. Početak prvog automobila je na startnoj liniji. U početnom trenutku svi istodobno kreću iz mirovanja jednako jednoliko ubrzano. Prvi automobil svojom duljinom prelazi startnu liniju za dvije sekunde. Koliko dugo 17. automobil svojom duljinom prelazi startnu liniju?

4. zadatak (10 bodova)

Tijelo mase 10 g bačeno je vertikalno uvis početnom brzinom 20 m/s. Sila otpora zraka iznosi 2.69 cN, a ubrzanje slobodnoga pada $g = 9.81$ m/s^2. Odredite vrijeme uspinjanja do maksimalne visine, ukupni prijeđeni put i ukupno proteklo vrijeme od izbačaja do povratka u početni položaj.

5. zadatak (10 bodova)

Vagon se giba akceleracijom $a = 1\ \mathrm{m/s^2}$ uz uzbrdicu koja s horizontalom zatvara kut $\alpha = 30°$, kao na slici. U vagonu se nalazi kosina koja s podom vagona zatvara isti kut α, odnosno 2α s horizontalom. Tijelo padne na kosinu i odbije se početnom brzinom $v_0 = 1\ \mathrm{m/s}$, koja s kosinom zavara kut 2α. Otpor je zraka zanemariv. Ubrzanje slobodnoga pada iznosi $g = 9.81\ \mathrm{m/s^2}$. Odredite udaljenost od početne točke udara u kosinu do sljedeće točke sudara s kosinom.



Županijsko natjecanje iz fizike 2025./2026.
Srednje škole – 1. skupina

Rješenja i smjernice za bodovanje

U smjernicama je naveden samo jedan mogući način rješavanja, a treba priznati i bilo koji drugi ispravan postupak. Boduju se i drugi zapisi ako su u skladu s odabranim referentnim sustavom i napisanim jednadžbama u mjernim jedinicama po slobodnom izboru. Ako su preskočene trivijalne linije koje se boduju, a jednadžbe u nastavku su dobre, priznaju se bodovi kao da je napisano sve. Ne boduju se formule u kojima je upisan kriv iznos neke fizičke veličine. Dodjeljuju se samo cjelobrojni bodovi. Svaka novouvedena veličina treba biti jasno definirana ili označena na skici.

1. zadatak (10 bodova)

Biciklist uz i niz 2 brda, redom, u različitim vremenskim intervalima Δt_1, Δt_2, Δt_3 i Δt_4, prelazi jednake putove

$\Delta s_1 = \Delta s_2 = \Delta s_3 = \Delta s_4$ (1)

gibajući se jednoliko, brzinama:

$v_1 = 8\ \mathrm{m/s}$, $v_2 = 16\ \mathrm{m/s}$, $v_3 = 4\ \mathrm{m/s}$ i $v_4 = 16\ \mathrm{m/s}$.

Dakle,

[1 bod] $\Delta s_1 = v_1\,\Delta t_1 = 8\ \mathrm{m\,s^{-1}} \cdot \Delta t_1,$ (2)

[1 bod] $\Delta s_2 = v_2\,\Delta t_2 = 16\ \mathrm{m\,s^{-1}} \cdot \Delta t_2,$ (3)

[1 bod] $\Delta s_3 = v_3\,\Delta t_3 = 4\ \mathrm{m\,s^{-1}} \cdot \Delta t_3,$ (4)

[1 bod] $\Delta s_4 = v_4\,\Delta t_4 = 16\ \mathrm{m\,s^{-1}} \cdot \Delta t_4.$ (5)

Iz jednakosti (2) i (3), (3) i (4), (3) i (5) slijede odnosi vremenskih intervala:

[1 bod] $\Delta t_1 = 2\,\Delta t_2,$

[1 bod] $\Delta t_3 = 4\,\Delta t_2,$

[1 bod] $\Delta t_4 = \Delta t_2.$

Tada ukupno vrijeme gibanja

$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 + \Delta t_4$

možemo izraziti preko jedne varijable (priznati i drugi valjani izraz u ovisnosti o 1 varijabli)

[1 bod] $\Delta t = 8\,\Delta t_2.$

Ukupni prijeđeni put

$\Delta s = \Delta s_1 + \Delta s_2 + \Delta s_3 + \Delta s_4$

zbog (1), izražen preko (3), iznosi (priznati i drugi valjani izraz u ovisnosti o 1 varijabli)

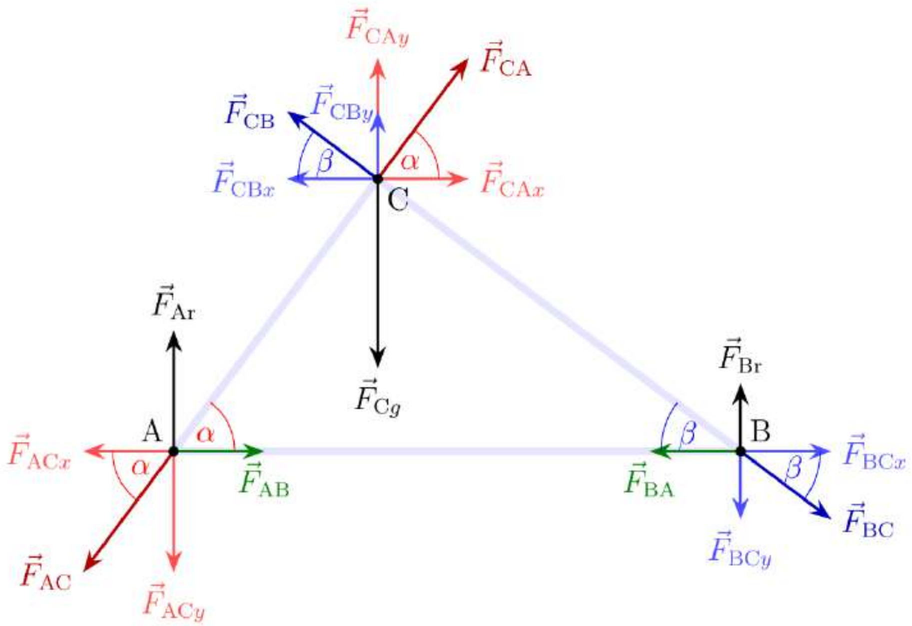
[1 bod] $\Delta s = 4\,\Delta s_2 = 64\ \mathrm{m\,s^{-1}} \cdot \Delta t_2.$

Srednja brzina iznosi

[1 bod] $\bar{v} = \Delta s/\Delta t = 8\ \mathrm{m/s}.$

2. zadatak (10 bodova)

Radi jednostavnosti označimo duljine stranica trokuta ABC:
$a = |\mathrm{BC}| = 40\ \mathrm{cm},\ b = |\mathrm{AC}| = 30\ \mathrm{cm},\ c = |\mathrm{AB}| = 50\ \mathrm{cm},$
koji je pravokutan jer vrijedi Pitagorin poučak, $30^2 + 40^2 = 50^2$.
Sustav je u ravnoteži pa je suma sila u točkama A, B i C jednaka nuli, kao na slici.



Sile na rubovima šine istog su iznosa, suprotnih orijentacija:
$|\vec{F}_{\mathrm{AB}}| = |\vec{F}_{\mathrm{BA}}| = F_{\mathrm{AB}},\ |\vec{F}_{\mathrm{BC}}| = |\vec{F}_{\mathrm{CB}}| = F_{\mathrm{BC}},\ |\vec{F}_{\mathrm{AC}}| = |\vec{F}_{\mathrm{CA}}| = F_{\mathrm{AC}}.$
Iz jednakosti horizontalnih komponenti u točkama A i B, prema oznakama na slici, slijedi

[1 bod] $F_{\mathrm{AC}x} = F_{\mathrm{AB}},$

[1 bod] $F_{\mathrm{BC}x} = F_{\mathrm{AB}},$

iz čije jednakosti slijedi jednakost horizontalnih komponenti

[1 bod] $F_{\mathrm{AC}x} = F_{\mathrm{BC}x},$

koje u rastavu razapinju trokut sličan pravokutnome trokutu ABC pa vrijedi

$\frac{b}{c} F_{\mathrm{AC}} = \frac{a}{c} F_{\mathrm{BC}},$

[1 bod] $F_{\mathrm{BC}} = \frac{b}{a} F_{\mathrm{AC}} = \frac{3}{4} F_{\mathrm{AC}}.$ (1)

Iz jednakosti vertikalnih komponenti u točki C slijedi

[1 bod] $F_{\mathrm{AC}y} + F_{\mathrm{BC}y} = F_{\mathrm{C}g},$

$\frac{a}{c} F_{\mathrm{AC}} + \frac{b}{c} F_{\mathrm{BC}} = F_{\mathrm{C}g} \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{a}{c} F_{\mathrm{AC}} + \frac{b}{c}\frac{b}{a} F_{\mathrm{AC}} = F_{\mathrm{C}g} \implies \left(\frac{4}{5} + \frac{9}{20}\right) F_{\mathrm{AC}} = F_{\mathrm{C}g} \implies \frac{25}{20} F_{\mathrm{AC}} = F_{\mathrm{C}g},$

[1 bod] $F_{\mathrm{AC}} = \frac{4}{5} F_{\mathrm{C}g} = 400\ \mathrm{N}.$

Iz (1) slijedi

$F_{\mathrm{BC}} = \frac{3}{4} F_{\mathrm{AC}} = 300\ \mathrm{N}.$

Iz jednakosti vertikalnih komponenti u točkama A i B slijede iznosi reakcija podloge:

[1 bod] $F_{\mathrm{Ar}} = F_{\mathrm{AC}y},$

[1 bod] $F_{\mathrm{Ar}} = \frac{a}{c} F_{\mathrm{AC}} = 320\ \mathrm{N};$

[1 bod] $F_{\mathrm{Br}} = F_{\mathrm{BC}y},$

[1 bod] $F_{\mathrm{Br}} = \frac{b}{c} F_{\mathrm{BC}} = 180\ \mathrm{N}.$

3. zadatak (10 bodova)

Automobili kreću iz mirovanja i gibaju se jednakim akceleracijama a pa 1. automobil za vrijeme prelaska preko startne linije

$\Delta t_1 = 2\ s$

prijeđe put jednak duljini automobila

[1 bod] $s_1 = a\,\Delta t_1^2/2$

iz čega slijedi akceleracija

[1 bod] $a = 2\,s_1/\Delta t_1^2.$ (1)

Automobili su razmaknuti za polovicu duljine pa udaljenost početaka susjednih automobila iznosi

[1 bod] $d = s_1 + 0.5\,s_1 = 1.5\,s_1.$

U početnom trenutku početak 17. automobila udaljen je 16 razmaka d

[1 bod] $s_\mathrm{P} = 16\,d_1 = 24\,s_1,$ (2)

a njegov je kraj udaljeniji za duljinu automobila

[1 bod] $s_\mathrm{K} = s_\mathrm{P} + s_1 = 25\,s_1.$ (3)

Iz definicije akceleracije, tijekom prelaska 17. automobila preko startne linije, kada njegova brzina poraste od v_P do v_K,

[1 bod] $a = (v_\mathrm{K} - v_\mathrm{P})/\Delta t_{17}$

možemo izraziti traženo vrijeme,

[1 bod] $\Delta t_{17} = (v_\mathrm{K} - v_\mathrm{P})/a,$

[1 bod] $\Delta t_{17} = \left(\sqrt{2\,a\,s_\mathrm{K}} - \sqrt{2\,a\,s_\mathrm{P}}\right)/a = \sqrt{2\,s_\mathrm{K}/a} - \sqrt{2\,s_\mathrm{P}/a},$

koje uvrštavanjem (1), (2) i (3) postaje

$$\Delta t_{17} = \sqrt{2\cdot 25\,s_1 \cdot \frac{\Delta t_1^2}{2\,s_1}} - \sqrt{2\cdot 24\,s_1 \cdot \frac{\Delta t_1^2}{2\,s_1}}$$

[1 bod] $\Delta t_{17} = \left(\sqrt{25} - \sqrt{24}\right)\Delta t_1 = \left(5 - 2\sqrt{6}\right)\Delta t_1$

[1 bod] $\Delta t_{17} = \left(5 - 2\sqrt{6}\right)\cdot 2\ \mathrm{s} \approx 202\ \mathrm{ms}.$

4. zadatak (10 bodova)

Neka je ishodište sustava referencije u početnom položaju, a pozitivna os orijentirana prema gore. Tijelo mase $m = 10\,\mathrm{g}$ prvo se giba prema gore početnom brzinom $v_0 = 20\,\mathrm{m/s}$, jednoliko usporava, zaustavlja se te zatim jednoliko ubrzava prema dolje prema početnom položaju. Sila otpora zraka $F_o = 2.69\,\mathrm{cN}$ djeluje suprotno smjeru gibanja (brzini). Prema 2. Newtonovu zakonu, ukupna sila na tijelo mase m tijekom gibanja prema gore iznosi

[1 bod] $m\,a_1 = -m\,g - F_o$

pa tijelo usporava akceleracijom

[1 bod] $a_1 = -g - F_o/m$

$a_1 = -12.5\,\mathrm{m/s^2}$.

Na vrhu je brzina $v_1 = 0\,\mathrm{m}/s$ pa je vrijeme uspinjanja

[1 bod] $t_1 = (v_1 - v_0)/a_1 = 1.6\,\mathrm{s}$.

Tijelo je od početnog položaja do maksimalne visine prešlo put

[1 bod] $s_1 = v_0\,t_1 + 0.5\,a_1\,t_1^2$

$s_1 = 16\,\mathrm{m}$.

Pri povratku u početni položaj prijeđe isti taj put

$s_2 = s_1$

pa je ukupni prijeđeni put

[1 bod] $s = s_1 + s_2 = 2\,s_1 = 32\,\mathrm{m}$.

Prema 2. Newtonovu zakonu, ukupna sila na tijelo mase m tijekom gibanja prema dolje iznosi

[1 bod] $m\,a_2 = -m\,g + F_o$

pa tijelo ubrzava prema dolje akceleracijom

[1 bod] $a_2 = -g + F_o/m$

$a_2 = -7.12\,\mathrm{m/s^2}$.

Od početka gibanja do povratka u početni položaj 0,

[1 bod] $0 = s_1 + 0.5\,a_2(t_2 - t_1)^2,$ (1)

proteklo je vrijeme

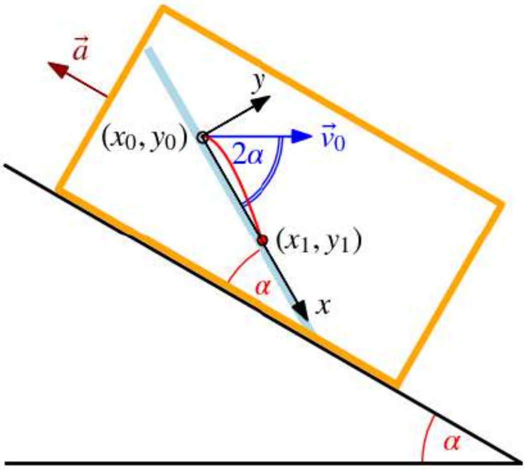
[1 bod] $t_2 = t_1 + \sqrt{-2\,s_1/a_1}$

[1 bod] $t_2 \approx 1.60\,\mathrm{s} + 2.12\,\mathrm{s} = 3.72\,\mathrm{s}$.

Napomena: vrijeme se je moglo izvući i iz konačne brzine $v_2 = a_2(t_2 - t_1)$ pa se umjesto (1) mogu bodovati i izrazi poput

$v_2 = -\sqrt{-2\,a_2\,s_2} \approx -15.1\,\mathrm{m/s}$.

5. zadatak (10 bodova)

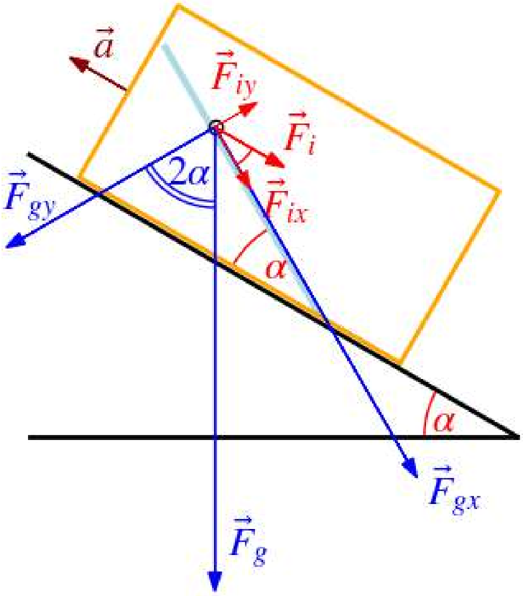


Neka je ishodište Kartezijeva koordinatnog sustava u točki (x_0, y_0) na kosini koja se nalazi u sustavu vagona koji ubrzava akceleracijom $|\vec{a}| = 1\ \mathrm{m/s^2}$ uz kosinu (neinercijski sustav), tj. u prvoj točki sudara tijela s kosinom koja s horizontalom zatvara kut $\alpha + \alpha = 2\alpha = 60°$. Os x usmjerena niz kosinu, a os y okomita na kosinu, kao na gornjoj slici desno. Početna brzina tijela iznosi $v_0 = 1\ \mathrm{m/s}$. Na tijelo cijelo vrijeme gibanja , do sljedećeg sudara u (x_1, y_1), djeluju:

[1 bod] inercijska sila $\vec{F}_\mathrm{i} = -m\vec{a}$,

[1 bod] i gravitacijska sila $\vec{F}_\mathrm{g} = m\vec{g}$,

čije su komponente, kao na donjoj slici desno:



$F_{\mathrm{i}x} = ma\cos\alpha = ma\sqrt{3}/2$,

$F_{iy} = ma\sin\alpha = ma/2$,

$F_{\mathrm{g}x} = mg\sin(2\alpha) = mg\sqrt{3}/2$,

$F_{\mathrm{g}y} = -mg\cos(2\alpha) = -mg/2$.

Prema 2. Newtonovu zakonu komponente akceleracije tijela iznose:

[1 bod] $a_x = (F_{\mathrm{i}x} + F_{\mathrm{g}x})/m = (a+g)\sqrt{3}/2$,

[1 bod] $a_y = (F_{\mathrm{i}y} + F_{\mathrm{g}y})/m = (a-g)/2$.

Početna brzina tijela iznosi

[1 bod] $v_{0x} = v_0\cos(2\alpha) = v_0/2$,

[1 bod] $v_{0y} = v_0\sin(2\alpha) = v_0\sqrt{3}/2$.

Daljnji dio gibanja analiziramo kao kosi hitac do ponovnog sudara s kosinom u trenutku t_1,

[1 bod] $(y_1 = 0) = v_{0y}\, t_1 + a_y\, t_1^2/2$

$0 = v_0\, t_1\, \sqrt{3}/2 + (a-g)\, t_1^2/4$

što možemo podijeliti s $t_1 \neq 0$ pa slijedi

[1 bod] $t_1 = 2\sqrt{3}\, v_0/(g-a)$,

$t_1 \approx 393\ \mathrm{ms}$,

tijekom kojega se čestica duž kosine pomakne za

[1 bod] $x_1 = v_{0x}\, t_1 + a_x\, t_1^2/2$,

$x_1 = \sqrt{3}\, v_0^2/(g-a) + \ 3\sqrt{3}v_0^2(a+g)/(g-a)^2$,

[1 bod] $x_1 \approx 92.0\ \mathrm{cm}$,

što je tražena udaljenost točke sudara s kosinom.

Napomena: Ako je riješeno na drugi način, bodovi u međukoracima mogu se dodijeliti drugim izraženim veličinama koje vode prema rješenju, kao šta je dano u primjeru na sljedećoj stranici.

Izdvajamo još jednu od mogućih varijanti rješavanja **5. zadatka**. Neka je ishodište Kartezijeva koordinatnog sustava u točki $(x_0 = 0, y_0 = 0)$ na kosini koja se nalazi u sustavu vagona u točki početnog položaja tijela (prvog sudara tijela s kosinom), os x orijentirana horizontalno u smjeru početne brzine, a y vertikalno suprotno gravitacijskoj sili. Vagon ubrzava akceleracijom $|\vec{a}| = 1\ \mathrm{m/s^2}$ uz kosinu pa je sustav neinercijski. Početna brzina tijela iznosi $v_0 = 1\ \mathrm{m/s}$. Na tijelo cijelo vrijeme gibanja , do sljedećeg sudara u (x_1, y_1), djeluju:

[1 bod] inercijska sila $\vec{F}_\mathrm{i} = -m\vec{a}$,

[1 bod] i gravitacijska sila $\vec{F}_\mathrm{g} = m\vec{g}$,

čije su komponente (priznati prethodne bodove ako su odmah napisane samo komponente):

$F_{\mathrm{i}x} = ma\cos\alpha = ma\sqrt{3}/2$,

$F_{iy} = -ma\sin\alpha = -ma/2$,

$F_{\mathrm{g}x} = 0$,

$F_{\mathrm{g}y} = -mg$.

Gibanje analiziramo kao horizontalni hitac u neinercijskom sustavu, odnosno gibanje složeno od jednoliko ubrzanih gibanja u x i y smjeru, gdje akceleracije prema 2. Newtonovu zakonu iznose:

[1 bod] $a_x = (F_{\mathrm{i}x} + F_{\mathrm{g}x})/m = a\sqrt{3}/2$,

[1 bod] $a_y = (F_{\mathrm{i}y} + F_{\mathrm{g}y})/m = -a/2 - g$.

Početna brzina tijela ima samo x komponentu,

[1 bod] $v_{0x} = v_0$

pa su koordinate položaja tijela:

[1 bod] $x = v_0\, t + \sqrt{3}\, a\, t^2/4$, (1)

[1 bod] $y = -g\, t^2/2 - a\, t^2/4$. (2)

U trenutku t_1 ponovnog sudara s kosinom, čiju jednadžbu (pravca) možemo napisati u obliku

[1 bod] $y = -\sqrt{3}x$, (3)

koordinate tijela (1) i (2) moraju zadovoljavati jednadžbu (3),

$-g\, t_1^2/2 - a\, t_1^2/4 = -\sqrt{3}\left(v_0\, t_1 + \sqrt{3}\, a\, t_1^2/4\right)$

koju možemo podijeliti s $-t_1/2 \neq 0$ pa slijedi

$(g + a/2)\, t_1 = 2\sqrt{3}\, v_0\ + 3\, a\, t_1/2$,

[1 bod] $t_1 = 2\sqrt{3}\, v_0/(g - a)$,

$t_1 \approx 393\ \mathrm{m}s$,

kada se čestica prema (1) i(2) nalazi u položaju

$x_1 = 46.0\ \mathrm{cm}$,

$y_1 = -79.7\ \mathrm{cm}$.

Primjenom Pitagorina poučka dobivamo udaljenost točke sudara tijela s kosinom

[1 bod] $d = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \approx 92.0\ \mathrm{cm}$.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ FIZIKE – 25. veljače 2025.

Srednje škole – 2. skupina

Rješenja i smjernice za bodovanje

Upute za bodovanje: Ovdje je prikazan jedan način rješavanja zadataka. Ako učenici riješe zadatak na drugačiji, a fizikalno pravilan način, treba im dati puni broj bodova predviđen za taj zadatak. Ako učenici ne napišu posebno svaki ovdje predviđeni korak, a vidljivo je da su ga napravili, treba im dati bodove kao da su ga napisali. Najmanja jedinica bodova koja se dodjeljuje jest 1 bod.

Zadatak 1. (ukupno bodova: 7)

Primijećeno je da ako cilindrično tijelo napravljeno od jednog materijala postavimo da pluta u tekućini tako da mu je os simetrije vertikalno orijentirana, 1/3 njegove visine bude ispod površine tekućine.

Ako zamijenimo polovicu prvotnog materijala cilindra s drugim te tako modificirani cilindar uronimo na isti način u istu tekućinu, on pak pluta s 2/3 visine ispod površine tekućine. Odredite omjer gustoća prvog i drugog materijala.

Rješenje:

U prvom slučaju težina istisnute tekućine mora odgovarati težini cijelog cilindra, odnosno **(1 bod za poznavanje Arhimedova zakona. 1 bod za točno postavljenu relaciju za uvjet plutanja originalnog cilindra.)**

$$m_{\text{cilindar, 1}}\, g = V_{\text{cilindar}} \rho_1 g = \frac{1}{3} V_{\text{cilindar}} \rho_{\text{tekućina}}\, g\,,$$

iz čega slijedi da je gustoća prvog materijala jednaka **(1 bod točan rezultat za prvu gustoću.)**

$$\rho_1 = \frac{1}{3} \rho_{\text{tekućina}}\,.$$

U drugom slučaju vrijedi isti zaključak, pri čemu nije bitno koji smo dio materijala cilindra zamijenili jer nas zanima isključivo ukupna težina i istisnina **(1 bod za ispravan zaključak o zamjeni materijala. 1 bod za točno postavljenu relaciju za uvjet plutanja modificiranog cilindra.)**

$$m_{\text{cilindar, 2}}\, g = V_{\text{cilindar}} \left(\frac{1}{2} \rho_1 + \frac{1}{2} \rho_2 \right) g = \frac{2}{3} V_{\text{cilindar}} \rho_{\text{tekućina}}\, g\,.$$

Uvrstimo li rezultat za gustoću prvog materijala imamo **(1 bod za točan rezultat za drugu gustoću.)**

$$\rho_1 + \rho_2 = \frac{1}{3} \rho_{\text{tekućina}} + \rho_2 = \frac{4}{3} \rho_{\text{tekućina}} \quad \rightarrow \quad \rho_2 = \rho_{\text{tekućina}}\,.$$

Stoga je traženi omjer **(1 bod za točan omjer gustoća.)**

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\frac{1}{3} \rho_{\text{tekućina}}}{\rho_{\text{tekućina}}} = \frac{1}{3}\,.$$

Zadatak 2. (ukupno bodova: 7)

Pri trenutačnom kvaru ventila vakuumskog sustava u laboratoriju u postav ukupnog volumena 10 litara u kratkom vremenu ulazio je zrak. Ako je odmah poslije kvara utvrđeno da je tlak u postavu 1 miliatmosfera, odredite koliko je mola plina ušlo u sustav.

Pretpostavite da je u početnom trenutku postav ispunjen s 0.1 milimola zraka temperature 10 kelvina, da se zrak može opisati kao idealni plin i da se ulazak zraka u postav odvija kao slobodna ekspanzija plina (pri slobodnoj ekspanziji plin ne izmjenjuje toplinu s okolinom niti vrši rad). Pretpostavite i da je ambijentalna temperatura zraka 25 stupnjeva Celzijeva te da je tlak od 1 miliatmosfere očitan tek nakon što se novopridošli zrak termalizirao s onim koji u postavu bio i prije, no ne i sa stijenkama postava.

Rješenje:

U slobodnoj ekspanziji plin ne vrši rad niti izmjenjuje toplinu s okolinom, stoga, po prvom zakonu termodinamike, njegova unutarnja energija ostaje nepromijenjena **(1 bod za točnu interpretaciju slobodne ekspanzije.)**. Kako za dani broj čestica idealnog plina njihova unutarnja energija ovisi isključivo o temperaturi, zaključujemo kako konačna temperatura tog plina, prije termalizacije, mora biti ista kao i početna **(1 bod za točan zaključak o konačnoj temperaturi.)**.

Nakon što dodatni (novi) zrak uđe u postavu i nakon što se on termalizira sa zrakom koji je u postavu bio i prije (stari) vrijedi **(1 bod za točnu jednadžbu stanja za konačno stanje.)**

$$pV = (n_{\text{stari}} + n_{\text{novi}})RT_{\text{poslije termalizacije}}\,,$$

pri čemu će tlak u toj relaciji odgovarati tlaku koji je izmjeren nakon kvara. Naznačili smo da je i temperatura drugačija, jer se novi zrak termalizirao sa starim.

Ukupna energija u sustavu, po naputku zadatka, morat će dolaziti isključivo od unutarnje energije plinova, odnosno **(1 bod za ispravan zaključak o ukupnoj energiji. 1 bod za točnu jednadžbu za energiju.)**

$$U_{\text{novo}} = \gamma(n_{\text{stari}} + n_{\text{novi}})RT_{\text{poslije termalizacije}} = \gamma n_{\text{stari}}RT_{\text{prije kvara}} + \gamma n_{\text{novi}}RT_{\text{atmosfera}}\,.$$

Kombinacijom prethodnih relacija imamo

$$pV = n_{\text{stari}}RT_{\text{prije kvara}} + n_{\text{novi}}RT_{\text{atmosfera}}\,,$$

iz čega slijedi količina tvari zraka koji je ušao u sustav **(1 bod za točan rezultat za količinu tvari. 1 bod za ispravno baratanje mjernim jedinicama u ovom zadatku, odnosno, za uspješne pretvorbe svih mjernih jedinica.)**

$$n_{\text{novi}} = \frac{pV}{RT_{\text{atmosfera}}} - n_{\text{stari}}\frac{T_{\text{prije kvara}}}{T_{\text{atmosfera}}} = 0.4053\ \text{mmol}\,.$$

Zadatak 3. (ukupno bodova: 13)

Složeni pneumatički amortizer sastavljen je od cilindrične komore ispunjene jednoatomnim idealnim plinom, koja na jednom svom kraju ima bezmaseni klip. Klip u komori može kliziti bez trenja te je s drugim krajem komore spojen preko idealne opruge konstante 12 kN/m.

U procesu testiranja amortizer se fiksira za horizontalnu podlogu te se prema njegovom klipu lansira blok mase 10 kg brzinom 72 km/h. Nakon što je blok dotaknuo klip, u trenutku kada se on trenutačno prestao gibati, primijećeno je da se klip pomaknuo za točno polovicu početne duljine komore. Odredite duljinu komore u početnom trenutku.

U početnom trenutku opruga je opuštena te je volumen plina (koji odgovara volumenu komore) jednak 5 litara, a klip miruje. Zanemarite toplinski kapacitet opruge te pretpostavite da se sudar odvije tako brzo da plin ne stigne izmijeniti toplinu s okolinom. Dodatno, pretpostavite da je atmosferski tlak jednak jednoj atmosferi. Blok je takvih dimenzija da prilikom sudara s klipom ne dira stijenke komore amortizera te on po podlozi klizi bez trenja.

Rješenje:

Kako je opruga opuštena u početnom trenutku, tlak plina mora biti jednak atmosferskom, odnosno **(1 bod za točan zaključak o tlaku.)**

$$p_0 = p_{\text{atm}} = 101300\,\text{Pa}.$$

Jednoatomni idealni plin ima 3 stupnja slobode, što znači da je njegov adijabatski koeficijent γ jednak $5/3$ **(1 bod za poznavanje adijabatskog koeficijenta jednoatomnog plina.)**, stoga vrijedi

$$U(T) = \frac{3}{2}nRT.$$

Prva varijanta rješenja: zanemaruje se atmosferski tlak
Slijedi rješenje ostatka zadatka pri kojem se zanemaruje utjecaj atmosferskog tlaka na dinamiku. Ako su učenici riješili zadatak na ovaj način treba im dodijeliti bodove u skladu s danim predloškom. Druga varijanta je uzimanje u obzir atmosferskog tlaka što je dano u nastavku.

Blok i klip gibaju se zajedno od trenutka sudara te će se oni zaustaviti kada kinetička energija bloka (klip je bezmasen pa je njegova kinetička energija uvijek jednaka nuli) prijeđe u elastičnu potencijalnu energiju opruge te unutarnju energiju plina. To znači da u trenutku njihova zaustavljanja vrijedi **(1 bod za točan zaključak o uvjetu zaustavljanja bloka.)**

$$\Delta E = E_{\text{kin, blok}} = \frac{1}{2}m_{\text{blok}}v_{\text{blok}}^2 = \Delta U_{\text{plin}} + \Delta E_{\text{pot, opruga}}.$$

Uvrstimo li poznate relacije za unutarnju energiju i elastičnu potencijalnu energiju slijedi **(1 bod za točnu jednadžbu za zakon očuvanja energije s uvrštenim svim energijama.)**

$$\frac{3}{2}nRT_{\text{kon}} - \frac{3}{2}nRT_0 + \frac{1}{2}k\Delta x^2 = \frac{1}{2}m_{\text{blok}}v_{\text{blok}}^2,$$

pri čemu je Δx pomak klipa koji ujedno odgovara i kompresiji opruge. Iskoristimo li jednadžbu stanja idealnog plina $pV = nRT$ **(1 bod za poznavanje jednadžbe stanja.)** te pomnožimo li obije strane s 2, prethodni izraz postaje

$$3p_{\text{kon}}V_{\text{kon}} - 3p_0V_0 + k\Delta x^2 = m_{\text{blok}}v_{\text{blok}}^2.$$

Iz uvjeta zadatka imamo da plin ne izmjenjuje toplinu s okolinom, što po definiciji znači da da plin prolazi kroz adijabatski proces **(1 bod za točan zaključak da je riječ o adijabatskom procesu.)** te vrijedi $p_{\text{kon}}V_{\text{kon}}^{\gamma} = p_0V_0^{\gamma} = \text{konst.}$ **(1 bod za poznavanje jednadžbe adijabatskog procesa.)**. Korištenjem tog izraza slijedi **(1 bod za uspješnu manipulaciju izraza za energiju koristeći jednadžbu adijabate.)**

$$3p_{\text{kon}}V_{\text{kon}}^{\gamma}V_{\text{kon}}^{1-\gamma} - 3p_0V_0 + k\Delta x^2 = m_{\text{blok}}v_{\text{blok}}^2\,,$$

$$3p_0V_0^{\gamma}V_{\text{kon}}^{1-\gamma} - 3p_0V_0 + k\Delta x^2 = m_{\text{blok}}v_{\text{blok}}^2\,.$$

No, kako je poznato da se opruga skrati za pola svoje duljine, nužno je da se i volumen plina smanjio za polovinu $V_{\text{kon}} = V_0/2$, tada je **(1 bod za zaključak za konačni volumen plina. 1 bod za uspješno korištenje tog zaključka u pojednostavljivanju izraza za energiju.)**

$$3p_0V_0^{\gamma}(0.5V_0)^{1-\gamma} - 3p_0V_0 + k\Delta x^2 = m_{\text{blok}}v_{\text{blok}}^2\,,$$

$$3p_0V_0(0.5)^{1-\gamma} - 3p_0V_0 + k\Delta x^2 = m_{\text{blok}}v_{\text{blok}}^2\,,$$

$$3p_0V_0\left((0.5)^{1-\gamma} - 1\right) + k\left(\frac{l_0}{2}\right)^2 = m_{\text{blok}}v_{\text{blok}}^2\,,$$

pri čemu smo u zadnjem izrazu ponovo iskoristili informaciju da se duljina prepolovila te označili početnu duljinu opruge, odnosno komore, s l_0. Konačno sređivanjem izraza i uvrštavanjem adijabatske konstante dobivamo **(1 bod za točan sređeni izraz. Bod dodijeliti ako je ovaj korak napravljen i implicitno traženjem numeričkog rješenja za duljinu)**

$$l_0 = 2\sqrt{\frac{m_{\text{blok}}v_{\text{blok}}^2 - 1.7622\,p_0V_0}{k}}\,.$$

Pretvorimo li sve mjerne jedinice u standardne SI jedinice (km/h u m/s, što daje početnu brzinu od 20 m/s te L u m^3, što daje početni volumen od 0.005 m^3) **(1 bod ako je točna pretvorba svih mjernih jedinica.)** i uvrstimo poznate veličine dobivamo rješenje **(1 bod za točno rješenje za duljinu.)**

$$l_0 = 1.0178\,\text{m}\,.$$

Druga varijanta rješenja: ne zanemaruje se atmosferski tlak

Slijedi rješenje ostatka zadatka, nastavljajući se na točku kada smo definirali unutarnju energiju, pri kojem se ne zanemaruje utjecaj atmosferskog tlaka na dinamiku. Za bodovanje pratiti predložak bodovanja kao da je riječ o slučaju u kojem se zanemaruje tlak, s jedinom razlikom da su jednadžbe promijenjene zbog pojave dodatnog člana te su one dane u nastavku:

$$\Delta E = E_{\text{kin, blok}} + \Delta W_{p_{\text{atm}}} = \frac{1}{2}m_{\text{blok}}v_{\text{blok}}^2 + p_{\text{atm}}S_{\text{klip}}\Delta x = \Delta U_{\text{plin}} + \Delta E_{\text{pot, opruga}}\,,$$

pri čemu je S_{klip} površina poprečnog presjeka klipa. Prepoznamo li da je $\Delta x = 0.5l_0$, imamo $S_{\text{klip}}\Delta x = 0.5S_{\text{klip}}l_0 = 0.5V_0$ te slijedi

$$\frac{3}{2}nRT_{\text{kon}} - \frac{3}{2}nRT_0 + \frac{1}{2}k\Delta x^2 = \frac{1}{2}m_{\text{blok}}v_{\text{blok}}^2 + \frac{1}{2}p_0V_0\,.$$

$$3p_{\text{kon}}V_{\text{kon}} - 3p_0V_0 + k\Delta x^2 = m_{\text{blok}}v_{\text{blok}}^2 + p_0V_0\,.$$

$$3p_{\text{kon}}V_{\text{kon}}^{\gamma}V_{\text{kon}}^{1-\gamma} - 4p_0V_0 + k\Delta x^2 = m_{\text{blok}}v_{\text{blok}}^2\,,$$

$$3p_0V_0^{\gamma}V_{\text{kon}}^{1-\gamma} - 4p_0V_0 + k\Delta x^2 = m_{\text{blok}}v_{\text{blok}}^2\,.$$

$$3p_0V_0^{\gamma}(0.5V_0)^{1-\gamma} - 4p_0V_0 + k\Delta x^2 = m_{\text{blok}}v_{\text{blok}}^2\,,$$

$$3p_0V_0(0.5)^{1-\gamma} - 4p_0V_0 + k\Delta x^2 = m_{\text{blok}}v_{\text{blok}}^2\,,$$

$$p_0V_0\left(3(0.5)^{1-\gamma} - 4\right) + k\left(\frac{l_0}{2}\right)^2 = m_{\text{blok}}v_{\text{blok}}^2\,,$$

$$l_0 = 2\sqrt{\frac{m_{\text{blok}}v_{\text{blok}}^2 - 0.7622\,p_0V_0}{k}}\,.$$

$$l_0 = 1.0976\ \text{m}\,.$$

Zadatak 4. (ukupno bodova: 10)

Grof Rumford je krajem 18. stoljeća izveo pokus kojim je pokazao da je teorija kalorika u termodinamici pogrešna. Proučite postav inspiriran njegovim pokusom koji se sastoji od cilindričnog bloka mjedi mase 4 tone posve uronjenog u cilindričnu bačvu ispunjenu vodom. Blok je uronjen tako da se njegov vrh nalazi 15 cm ispod površine vode. U bloku se u jednom trenutku počne bušiti rupa kako bi se proizvela topovska cijev. Nakon 10 sati bušenja primijećeno je da voda ključa te da se razina vode spustila za 2 cm.

a) Odredite koliko je topline oslobođeno procesom bušenja. Bačva je promjera 65 cm te je početni stupac vode u njoj visok 2 m. Uzmite da je početna temperatura i mjedi i vode jednaka 35 stupnjeva Celzijeva te da su temperature vode i sve mjedi uvijek jednake. Zanemarite toplinski kapacitet svrdla i bačve te svo toplisko širenje. Pretpostavite da nema nikakvih gubitaka energije, da se sva toplina stvorena bušenjem prenosi isključivo na mjedeni blok i vodu te da sve strugotine mjedi koje nastaju bušenjem ostaju unutar bačve, potopljene u vodi.

b) Odredite prosječnu snagu bušilice te zaključite koliki je najmanji broj konja koji su morali biti upregnuti kako bi se pogonilo bušilicu. Pretpostavite da jedan konj u prosjeku proizvodi jednu konjsku snagu koja odgovara 745 W. Specifični toplinski kapacitet mjedi je 400 J/kgK, dok je specifični toplinski kapacitet vode 4190 J/kgK. Gustoća vode je 1000 kg/m^3, a mjedi 8500 kg/m^3. Latentna toplina isparavanja vode je 2.26 MJ/kg.

Rješenje:

a) Ukupni volumen vode odgovarati će volumenu koji preostaje u bačvi nakon što uzmemo u obzir prostor koji mjed zauzima. **(1 bod za uzimanje u obzir razlike u volumenu zbog istisnine mjedi. 1 bod za točan rezultat za volumen vode.)**

$$V_{\text{mjed}} = m_{\text{mjed}}/\rho_{\text{mjed}}\,,$$

$$V_{\text{voda}} = \pi r_{\text{bačva}}^2 h_{\text{voda}} - V_{\text{mjed}} = \pi r_{\text{bačva}}^2 h_{\text{voda}} - m_{\text{mjed}}/\rho_{\text{mjed}} = 0,19307\ \text{m}^3\,,$$

pri čemu su r radijus baze bačve te h visina stupca vode u bačvi. S obzirom da je vrh bloka mjedi ispod razine vode koja isparava, volumen vode koji je ispario odgovara jednostavnom umnošku baze cilindra i promjene visine stupca vode **(1 bod za točan rezultat za volumen vode koji ispari.)**

$$V_{\text{voda, isparavanje}} = \pi r_{\text{bačva}}^2 \Delta h_{\text{voda}} = 0,006637\ \text{m}^3\,.$$

Kako bi voda počela ključati, odnosno isparavati, potrebno ju je zagrijati do 100° C. Zajedno s vodom zagrijava se i mjed, a po naputku zadatka možemo računati zagrijavanje ukupne mase mjedi, jer strugotine ostaju unutar bačve. Ukupna energija potrebna za to je **(1 bod za točan zaključak koliko je energije potrebno za zagrijavanje. 1 bod za ispravno korištenje specifičnih toplinskih kapaciteta u zadatku.)**

$$\Delta Q_{\text{zagrijavanje}} = (C_{\text{mjed}} + C_{\text{voda}})\Delta T = (c_{\text{voda}}\rho_{\text{voda}}V_{\text{voda}} + c_{\text{mjed}}m_{\text{mjed}})\Delta T\,,$$

pri čemu su c specifični toplinski kapaciteti. U nastavku bušenja sve toplina odlazi u isparavanje vode, a toplina potrebna za to je **(1 bod za točan izraz za toplinu potrebnu za isparavanje.)**

$$\Delta Q_{\text{isparavanje}} = V_{\text{voda, isparavanje}}\rho_{\text{voda}}L_{\text{voda}}\,.$$

Sve skupa, ukupna toplina koja je oslobođena je **(1 bod za točan rezultat za ukupnu toplinu.)**

$$\Delta Q_{\text{uk}} = \Delta Q_{\text{zagrijavanje}} + \Delta Q_{\text{isparavanje}} = 171582\ \text{kJ}\,.$$

b) Prosječna snaga za vrijeme bušenja jednostavno odgovara oslobođenoj toplini podijeljenoj s ukupnim vremenom bušenja **(1 bod za točan rezultat za prosječnu snagu.)**

$$< P >= \frac{\Delta Q_{\mathrm{uk}}}{\Delta t_{\mathrm{uk}}} = 4766\ \mathrm{W}\,.$$

Minimalni broj konja koji je morao pogoniti postav dobijemo tako da prethodno izračunatu snagu podijelimo sa snagom koju jedan konj može razviti te zaokružimo na najbliži veći cijeli broj. Pri ovome pretpostavljamo da nema nikakvih energetskih gubitaka, što je u skladu s pretpostavkama zadatka i osigurava da je potrebna snaga najmanja, pa tako i broj konja. **(1 bod za ispravan zaključak kako dobiti minimalni broj konja. 1 bod za ispravan rezultat za minimalni broj konja.)**

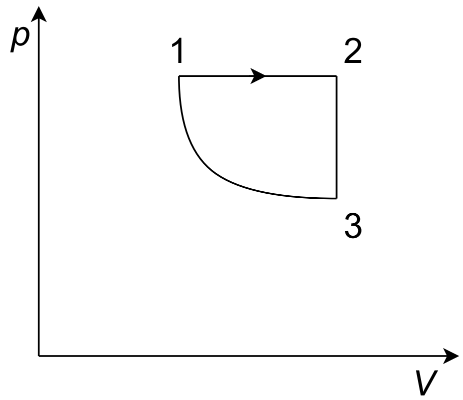
$$N_{\mathrm{konja,\ min}} = \left\lceil \frac{< P >}{P_{\mathrm{konj}}} \right\rceil = 7\,.$$

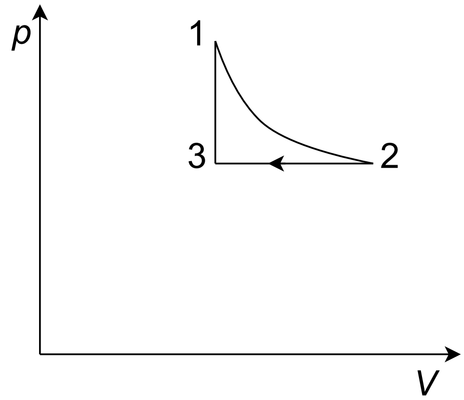
Zadatak 5. (ukupno bodova: 13)

Radni ciklus toplinskog stroja, čija je radna tvar jednoatomni idealni plin, može se sastojati od jedne adijabatske, jedne izohorne i jedne izobarne promjene. Skicirajte sve moguće kružne procese koji mogu pogoniti ovaj stroj u $p-V$ dijagramima. Naznačite koje promjene stanja odgovaraju kojemu dijelu dijagrama te u kojemu se smjeru odvijaju procesi. Odredite omjer korisnosti procesa s najvećom i najmanjom korisnosti ako je poznato da se u svim procesima u izobarnoj promjeni volumen plina promjeni za faktor 2.

Rješenje:

(Po 1 bod za svaki ispravno nacrtani dijagram, 2 boda ukupno. Obratiti pozornost na to da su izohorna i izobarna promjena prikazane ravnim crtama, dok je adijabatska promjena zakrivljena. Dodatno, u oba dijagrama treba biti jasno u kojem se smjeru odvija proces. Smjer procesa može biti opisan i riječima u ostatku rješenja.)





Nazovimo proces na lijevoj strani skice prvim procesom, a proces na desnoj strani skice drugim. Oni su jedini kružni procesi koje je moguće sastaviti od navedenih promjena. Točke u kojima se promjene spajaju označili smo brojevima te ćemo se u nastavku rješenja na njih tako i referirati.

Za izohornu promjenu vrijedi da plin ne obavalja rad, a promjena unutarnje energije plina jednaka je izmijenjenoj toplini **(1 bod za ispravan rezultat za izmijenjenu toplinu na izohori.)**

$$\Delta Q = \Delta U = \frac{3}{2}Nk_B\Delta T = \frac{3}{2}V\Delta p\,,$$

Za izobarnu promjenu vrijedi da se plinu mijenja i unutarnja energija te on vrši rad (ili se na njemu vrši rad). Vrijedi **(1 bod za ispravan rezultat za izmijenjenu toplinu na izobari.)**

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta W = \frac{3}{2}Nk_B\Delta T + p\Delta V = \frac{5}{2}Nk_B\Delta T = \frac{5}{2}p\Delta V\,.$$

Za prvi proces vrijedi **(1 bod za točan rezultat za primljenu toplinu u prvom procesu.)**

$$\Delta Q^{(1)}_{1-2} = \frac{5}{2}p_{1,2}(V_{2,3}-V_1) = \frac{5}{2}p_{1,2}(V_{2,3}-\frac{1}{2}V_{2,3}) = \frac{5}{4}p_{1,2}V_{2,3} > 0\,.$$

Kako je promjena 3-1 adijabata možemo povezati tlakove u procesu na sljedeći način **(1 bod za ispravno povezivanje veličina u prvom procesu kako bi se obije topline svele na to da ovise**

o zajedničkim parametrima.)

$$p_{1,2}V_1^{5/3} = p_3 V_{2,3}^{5/3} \quad \rightarrow \quad p_3 = p_{1,2}\left(\frac{V_1}{V_{2,3}}\right)^{5/3} = p_{1,2}\frac{1}{2^{5/3}} = p_{1,2}\frac{1}{2\sqrt[3]{4}}\,.$$

Koristeći ovu relaciju dobivamo rezultat za izmijenjenu toplinu u procesu 2-3 **(1 bod za točan rezultat za predanu toplinu u prvom procesu.)**

$$\Delta Q_{2-3}^{(1)} = \frac{3}{2}V_{2,3}(p_3 - p_{1,2}) = -\frac{3}{2}p_{1,2}V_{2,3}\left(1 - \frac{1}{2\sqrt[3]{4}}\right) < 0\,.$$

Sveukupno, ako označimo s $\Delta Q_<$ ukupnu toplinu koju je plin predao u jednom ciklusu, a s $\Delta Q_>$ ukupnu toplinu koju je primio, efikasnost ovog ciklusa je **(1 bod za točan rezultat za efikasnost prvog procesa.)**

$$\eta^{(1)} = 1 - \frac{|\Delta Q_<|}{\Delta Q_>} = 1 - \frac{\frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{2\sqrt[3]{4}}\right)}{\frac{5}{4}} = 1 - \frac{6}{5}\left(1 - \frac{1}{2\sqrt[3]{4}}\right) = 0.1780\,.$$

Za drugi proces vrijedi **(1 bod za točan rezultat za predanu toplinu u drugom procesu.)**

$$\Delta Q_{2-3}^{(2)} = \frac{5}{2}p_{2,3}(V_{1,3} - V_2) = \frac{5}{2}p_{2,3}(V_{1,3} - 2V_{1,3}) = -\frac{5}{2}p_{2,3}V_{1,3} < 0\,.$$

Slično kao i u prvom procesu, koristeći jednadžbu adijabate možemo povezati tlakove **(1 bod za ispravno povezivanje veličina u drugom procesu.)**

$$p_1 V_{1,3}^{5/3} = p_{2,3}V_2^{5/3} \quad \rightarrow \quad p_1 = p_{2,3}\left(\frac{V_2}{V_{1,3}}\right)^{5/3} = p_{2,3}2^{5/3} = 2\sqrt[3]{4}\,p_{2,3}\,.$$

Tada je izmjenjena toplina u promjeni 3-1 jednaka **(1 bod za točan rezultat za primljenu toplinu u drugom procesu.)**

$$\Delta Q_{3-1}^{(2)} = \frac{3}{2}V_{1,3}(p_1 - p_{2,3}) = \frac{3}{2}V_{1,3}p_{2,3}(2\sqrt[3]{4} - 1) > 0\,.$$

Konačno, efikasnost drugog procesa je **(1 bod za točan rezultat za efikasnost drugog procesa.)**

$$\eta^{(2)} = 1 - \frac{\frac{5}{2}p_{2,3}V_{1,3}}{\frac{3}{2}V_{1,3}p_{2,3}(2\sqrt[3]{4} - 1)} = 1 - \frac{5}{3}\frac{1}{2\sqrt[3]{4} - 1} = 0.2336$$

Traženi omjer je tada **(1 bod za točan rezultat za traženi omjer.)**

$$\frac{\eta_{\max}}{\eta_{\min}} = \frac{\eta^{(2)}}{\eta^{(1)}} = 1.3127$$

Fizikalne konstante:

ubrzanje sile teže blizu površine Zemlje:

$g = 9.81\text{m/s}^2$

atmosferski tlak, odnosno tlak koji odgovara jednoj atmosferi:

$p_{\text{atm}} = 1\ \text{atm} = 101300\ \text{Pa}$

temperatura apsolutne nule:

$T_0 = -273.15\ °\text{C}$

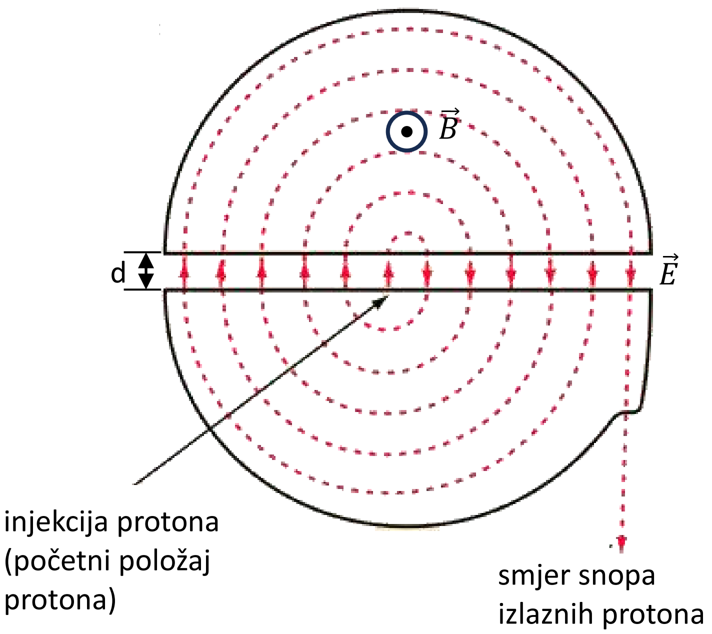
plinska konstanta:

$R = 8.314\ \text{J/Kmol}$

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ FIZIKE
3. SKUPINA ZADATAKA
ŠKOLSKA GODINA 2025./2026.

Zadatak 1. (10 bodova)
Ciklotron je uređaj koji se u fizici često upotrebljava za ubrzanje nabijenih čestica poput protona pomoću električnog i magnetskog polja. Sastoji se od dviju polukružnih polutki u kojima djeluje homogeno magnetsko polje i prostora između polutki u kojemu djeluje samo homogeno električno polje (vidi sliku). Magnetsko polje u polutkama okomito je na ravninu polutki i na smjer gibanja nabijene čestice. Električno polje između polutki paralelno je sa smjerom gibanja nabijene čestice kada ona uleti u prostor s električnim poljem (smjer električnog polja prikazan je na slici dolje).
Proton ulijeće u ciklotron bez početne brzine u prostor s električnim poljem kako je prikazano na slici. U polutkama polumjera $R = 1\ \mathrm{m}$ magnetsko je polje $B = 0.1\ \mathrm{T}$. Razmak između polutki iznosi $d = 5\ \mathrm{cm}$, dok je električno polje $E = 2\ \mathrm{kV/m}$. Zanemarite relativističke efekte.

a) Koliko iznosi energija protona nakon što izleti iz ciklotrona?
b) Koliko krugova proton napravi prije nego što napusti ciklotron?
c) Koliko iznosi srednja brzina protona u prvom krugu i koliko vremena protonu treba za prvi krug?



Rješenje:
U prostor između polutki proton uvijek ulazi brzinom paralelnom sa smjerom električnog polja te se ubrzava. U prostoru polutki smjer brzine uvijek je okomit na smjer magnetskog polja, pa proton ne ubrzava, već samo mijenja smjer gibanja, i to tako da izvodi kružno gibanje. U svakoj polutci proton izvede jedno polukružno gibanje.
Ukoliko proton uleti u prostor polutke gdje djeluje magnetsko polje B brzinom v, sila na proton iznosi:

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

gdje je $q = +e$ naboj protona.

S obzirom na orijentaciju magnetskog polja i brzine, te zanemarujući predznak, sila na proton iznosi:

$$F = evB$$

Sila je uvijek usmjerena okomito na smjer gibanja, pa mijenja samo smjer, a ne i iznos gibanja. Proton mase m giba se po kružnoj putanji polumjera r, a gornja sila odgovara centripetalnoj sili:

$$F_c = \frac{mv^2}{r} = evB$$

$$\frac{mv}{r} = eB$$ 1 bod

Nakon svakog prolaska kroz jednu od dviju polutki proton se ubrzava u električnom polju i povećava polumjer svoje kružne putanje. Najveća kružna putanja koju proton može imati, a nakon koje izlazi iz ciklotrona, odgovara polumjeru R ciklotrona. Njegova je maksimalna brzina tada ($r = R$):

$$\frac{mv_{max}}{R} = eB$$

Maksimalna brzina protona iznosi:

$$v_{max} = \frac{eBR}{m}$$

Energija protona, kada izleti iz ciklotrona, odgovarat će kinetičkoj energiji protona koji se giba brzinom v_{max}:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m v_{max}^2$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \frac{m(eBR)^2}{m^2}$$

$$E_{kin} = \frac{(eBR)^2}{2m} = 7.67 \cdot 10^{-14}\ \mathrm{J} = 479\ \mathrm{keV}$$ 1 bod

U jednom polukružnom gibanju proton će jednom proći kroz prostor između polutki, u kojemu se ubrzava u električnom polju E. Razlika potencijala (napon) U u kojemu se proton ubrzava iznosi:

$$U = Ed$$ 1 bod

gdje je d razmak između polutki, odnosno put koji proton prijeđe u električnom polju.

Svakim prolaskom kroz prostor s električnim poljem proton dobije energiju $E_{1/2}$:

$$E_{1/2} = qU = eEd$$

Proton u jednom krugu dva puta prolazi kroz prostor s električnim poljem i u svakom krugu dobije energiju $2E_{1/2}$. Nakon n krugova proton izlijeće iz ciklotrona i ima energiju E_{kin}:

$$E_{kin} = 2nE_{1/2} = 2n \cdot eEd$$ 1 bod

Konačno, broj krugova protona odredimo kao:

$$\frac{(eBR)^2}{2m} = 2neEd$$

$$n = \frac{e(BR)^2}{4mEd} = 2393$$ 1 bod

Primijetimo iz uvodne slike da broj krugova protona treba biti cijeli broj.

U prvom krugu proton prođe dva puta kroz prostor s električnim poljem, gdje se ubrzava s početne brzine 0 na konačnu brzinu v_1, odnosno s početne brzine v_1 na konačnu brzinu v_2. Uz udaljenost $2d$ proton u prvom krugu prođe polovicu opsega kruga polumjera r_1 brzinom v_1 i polovicu opsega kruga polumjera r_2 brzinom v_2. U prolasku kroz prostor s električnim poljem E proton se svaki put ubrzava pod utjecajem električne sile:

$$F_{el} = qE = eE$$

Uz primjenu Newtonova zakona:

$$F_{el} = am$$

dobijemo ubrzanje protona u električnom polju:

$$am = eE$$

$$a = \frac{eE}{m}$$ 1 bod

Proton na prvom izlasku iz područja s električnim poljem ima brzinu v_1:

$$v_1^2 = 2ad = \frac{2eEd}{m}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2eEd}{m}}$$ 0.5 boda

Proton na drugom izlasku iz područja s električnim poljem ima brzinu v_2 (kao da se ubrzavao na putu $2d$):

$$v_2^2 = 4ad = \frac{4eEd}{m}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{4eEd}{m}}$$ 0.5 boda

U prvom polukrugu u kojemu se kreće brzinom v_1, proton izvodi kružnu putanju polumjera r_1:

$$\frac{mv_1}{r_1} = eB$$

$$r_1 = \frac{mv_1}{eB} = \frac{m}{eB}\sqrt{\frac{2eEd}{m}} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mEd}{e}}$$ 0.5 boda

U prvom polukrugu u kojemu se kreće brzinom v_2, proton izvodi kružnu putanju polumjera r_2:

$$\frac{mv_2}{r_2} = eB$$

$$r_2 = \frac{mv_2}{eB} = \frac{m}{eB}\sqrt{\frac{4eEd}{m}} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{4mEd}{e}}$$ 0.5 boda

Vrijeme t_0 koje proton provede u području električnog polja u jednom krugu (dva puta prolazi kroz to područje) iznosi:

$$2d = \frac{at_0^2}{2} = \frac{eE}{2m}t_0^2$$

$$t_0 = \sqrt{\frac{4md}{eE}}$$ 0.5 boda

Vrijeme t_1 koje proton provede na polukružnoj putanji polumjera r_1 brzinom v_1:

$$v_1 = \frac{s_1}{t_1} = \frac{2r_1\pi}{2}\cdot\frac{1}{t_1} = \frac{r_1\pi}{t_1}$$

$$t_1 = \frac{r_1\pi}{v_1} = \frac{m\pi}{B}\sqrt{\frac{2Ed}{em}}\sqrt{\frac{m}{2eEd}} = \frac{m\pi}{eB}$$

Vrijeme koje proton provede na polukružnoj putanji uvijek je isto i ovisi samo o magnetskom polju. Prema tome, ukupno vrijeme koje proton provede na polukružnim putanjama r_1 i r_2 u prvom krugu iznosi:

$$t_1 + t_2 = \frac{2\pi m}{eB}$$ 0.5 boda

Ukupno vrijeme za prvi krug protona iznosi:

$$t_{UK} = t_0 + t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{4md}{eE}} + \frac{2\pi m}{eB} = 1.678\cdot 10^{-6}\ \mathrm{s}$$

Ukupan put koji je proton prešao iznosi:

$$s_{UK} = 2d + r_1\pi + r_2\pi$$

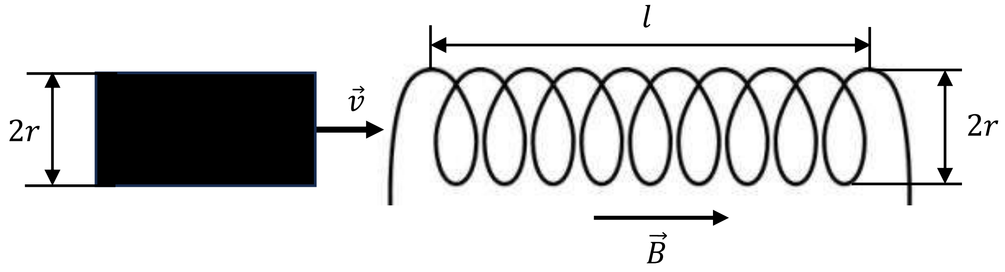
$$s_{UK} = 2d + \frac{\pi}{B}\sqrt{\frac{2mEd}{e}}\left(\sqrt{2}+1\right) = 0.2096\ \mathrm{m}$$

Srednja brzina protona u prvom krugu iznosi:

$$\bar{v} = \frac{s_{UK}}{t_{UK}} = 124.9\ \mathrm{km/s}$$ 1 bod

Zadatak 2. (10 bodova)
Idealna zavojnica polumjera $r = 10\ \mathrm{cm}$ i duljine 1 m sastoji se od 500 zavoja u jednom sloju. Zavojnica se nalazi u homogenom paralelnom magnetskom polju $B = 0.1\ \mathrm{T}$ usmjerenom uzduž osi zavojnice (vidi sliku). U zavojnicu započinjemo uvlačiti feromagnetsku jezgru u obliku cilindra duljine 50 cm te istog polumjera kao što je polumjer zavojnice. Feromagnetnu jezgru relativne permeabilnosti $\mu_r = 100$ uvlačimo konstantnom brzinom 0.1 m/s u smjeru paralelnom s osi zavojnice. Zanemarite rubne efekte. Pretpostavite da je magnetsko polje jezgre prisutno samo u jezgri i da iščezava izvan jezgre, te je unutar jezgre svugdje homogeno i paralelno s vanjskim poljem.

a) Koliki se napon inducira u zavojnici u prvoj sekundi uvlačenja jezgre?
b) Nacrtajte graf ovisnosti napona o vremenu za prvih 15 s (jezgru ste cijelu provukli kroz zavojnicu).



Rješenje:
Inducirani napon u zavojnici ovisit će o brzini promjene magnetskog toka (zanemarimo predznak):

$$U = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

Magnetski tok mijenja se uslijed uvlačenja feromagnetske jezgre zbog promjene magnetskog polja. Magnetsko polje bez jezgre iznosi B, dok je s prisutnom jezgrom magnetsko polje pojačano na $\mu_r B$. Promjena magnetskog polja stoga je:

$$\Delta B = \mu_r B - B = B(\mu_r - 1)$$ 1 bod

Vidimo da se magnetsko polje mijenja po cijelom poprečnom presjeku zavojnice:

$$A = r^2\pi$$

gdje je *r* polumjer zavojnice.
Promjena magnetskog toka po petlji jednog zavoja zavojnice iznosi:

$$\Delta\Phi = \Delta(BA) = A \cdot \Delta B$$ 1 bod

s obzirom na to da se površina zavojnice ne mijenja.
Potrebno je još izračunati u koliko zavoja dolazi do promjene magnetskog polja uslijed uvlačenja jezgre brzinom v. Ako zavojnica ima duljinu $l = 1\ \mathrm{m}$ sa $N = 500$ zavoja koji su namotani u jedan sloj, tada je debljina svakog zavoja:

$$d_1 = \frac{l}{N}$$

U vremenu Δt jezgra se uvukla u zavojnicu za dužinu:

$$\Delta s = v \cdot \Delta t$$ 1 bod

odnosno prošla je kroz poprečni presjek ΔN zavoja:

$$\Delta N = \frac{\Delta s}{d_1} = \frac{vN \cdot \Delta t}{l}$$ 1 bod

Promjenu toka trebamo pomnožiti s brojem zavoja u kojima je u vremenu Δt došlo do promjene magnetskog polja:

$$U = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = A \cdot \Delta N \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t} = A \cdot \frac{vN \cdot \Delta t}{l} \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t}$$

$$U = r^2 \pi \cdot \frac{vN}{l} \cdot B(\mu_r - 1)$$

$$U = \frac{r^2 \pi v N B(\mu_r - 1)}{l}$$ 1 bod

a) U prvoj sekundi još nije sva jezgra uvučena u zavojnicu, pa je inducirani napon:

$$U = \frac{r^2 \pi v N B(\mu_r - 1)}{l} = 15.55 \text{ V}$$ 1 bod

b) Napon se inducira sve dok se mijenja magnetski tok, odnosno dok se jezgra uvlači u zavojnicu. Kada je jezgra u potpunosti uvučena u zavojnicu, magnetski tok se ne mijenja, pa je inducirani napon jednak nuli. To se događa sve dok jezgra ne počne izlaziti iz zavojnice. Odredimo trenutak kada je jezgra u potpunosti u zavojnici:

$$t_1 = \frac{l_{Fe}}{v} = 5 \text{ s}$$

gdje je $l_{Fe} = 50\ cm$ dužina jezgre. U vremenu od $t_0 = 0$ s do $t_1 = 5$ s inducirani napon je stoga $U_1 = 15.55$ V. 1 bod

Jezgra dosegne drugi kraj zavojnice u trenutku:

$$t_2 = \frac{l}{v} = 10 \text{ s}$$

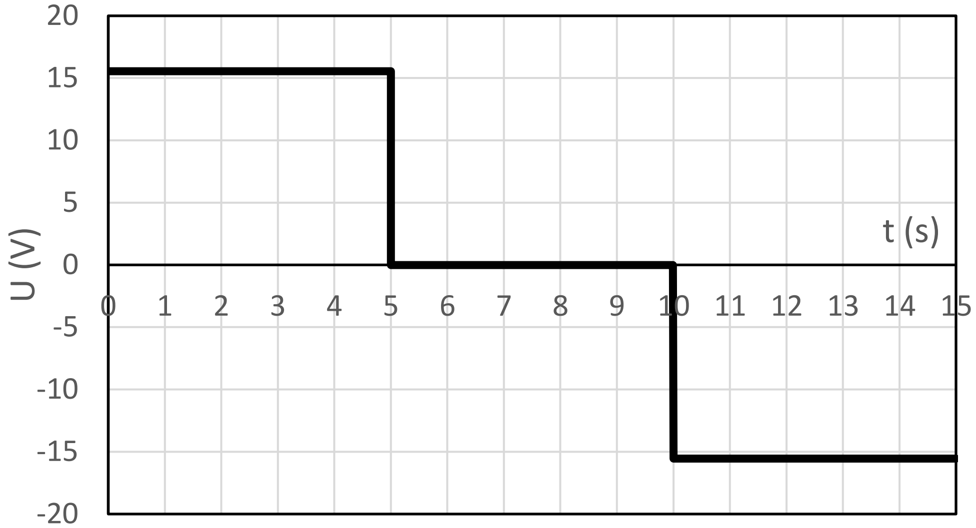
i u intervalu od $t_1 = 5$ s do $t_2 = 10$ s inducirani napon iznosi $U_2 = 0$ V. 1 bod

Kada jezgra započne izlaziti iz zavojnice, magnetski se tok smanjuje, a inducirani napon jednak je kao na početku, ali suprotnog predznaka sve dok jezgra ne izađe u potpunosti iz zavojnice u trenutku:

$$t_3 = \frac{l + l_{FE}}{v} = 15 \text{ s}$$

U intervalu od $t_2 = 10$ s do $t_3 = 15$ s inducirani napon iznosi $U_3 = -15.55$ V 1 bod

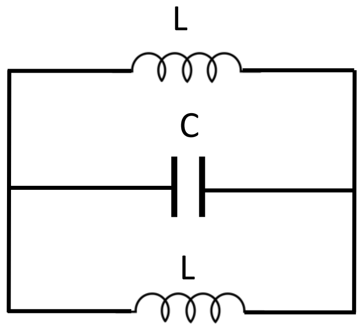
NAPOMENA: Zadatak priznati i ukoliko je učenik napisao i nacrtao napone suprotnih predznaka ($U_1 = -15.55$ V i $U_3 = 15.55$ V). Važno je da su U_1 i U_3 međusobno suprotni.



1 bod

Zadatak 3. (10 bodova)
Kondenzator $C = 1.5\ \mu\mathrm{F}$ nabijemo vanjskim izvorom na napon $U_0 = 10\ \mathrm{V}$ i zatim ga priključimo u trenutku $t = 0$ u idealni LC električni titrajni krug na slici. Prikazane su zavojnice jednake, a svaka je induktiviteta $L = 120\ \mathrm{mH}$.

a) Kojom frekvencijom titra ovaj LC krug?
b) Nakon koliko će se vremena kondenzator isprazniti?
c) U kojemu će trenutku struja kroz zavojnice biti maksimalna i koliko ta struja iznosi?
d) Koliko iznosi maksimalna energija magnetskog polja svake zavojnice?



Rješenje:
Kako bismo riješili električni titrajni krug, potrebno je odrediti frekvenciju električnih titraja. Primijetimo da su zavojnice spojene paralelno, pa se problem može svesti na jednostavni serijski LC krug koji će titrati frekvencijom:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_{eq}C}}$$ 1 bod

gdje je L_{eq} ekvivalentni induktivitet dviju paralelno spojenih zavojnica:

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L} + \frac{1}{L} = \frac{2}{L}$$

$$L_{eq} = \frac{L}{2} = 60\ \mathrm{mH}$$ 1 bod

Frekvencija LC kruga je:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_{eq}C}} = \frac{\sqrt{2}}{2\pi\sqrt{LC}} = 530.5\ \mathrm{Hz}$$ 1 bod

Električni krug simetričan je s obzirom na kondenzator, što znači da će priključenjem nabijenog kondenzatora u krug započeti teći jednaka struja kroz obje zavojnice, koja je jednaka polovici struje kojom se izbija kondenzator. Bez prisutnosti zavojnica kondenzator bi se izbio, no struja kroz zavojnicu inducirat će napon kojim će se kondenzator nabiti na isti početni napon, ali suprotnog predznaka.
Naponi na zavojnicama i kondenzatoru su jednaki i suprotni, a mijenjaju se kao:

$$U_C = -U_L = U_0 \cos(2\pi f_0 t)$$

Kondenzator će se isprazniti nakon vremena

$$t = \frac{T}{4} = \frac{1}{4f_0} = 0.471\ \mathrm{ms}$$ 1 bod

Struja kroz zavojnice bit će maksimalna kada je kondenzator ispražnjen i njegova je energija jednaka nuli, te je sva energija sadržana u zavojnici. To se zbiva u trenutku

$$t = \frac{T}{4} = \frac{1}{4f_0} = 0.471\ \mathrm{ms}$$ 2 boda

Iznos maksimalne struje možemo odrediti iz zakona očuvanja energije, čime ćemo odrediti i maksimalnu energiju magnetskog polja svake zavojnice. U početnom trenutku sva je energija sadržana u kondenzatoru, $\frac{1}{2}CU^2$, dok je u trenutku kada je kondenzator izbijen sva energija sadržana u dvije zavojnice, $2 \cdot \frac{1}{2}LI^2$:

$$\frac{1}{2}CU^2 = 2 \cdot \frac{1}{2}LI^2$$ 2 boda

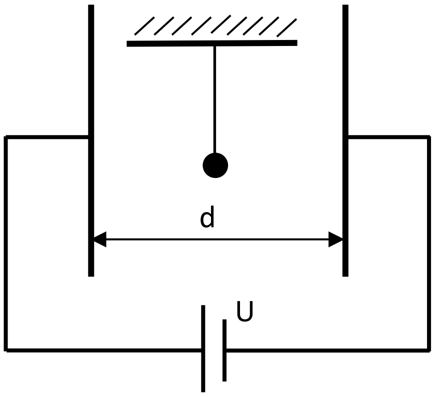
Maksimalna energija zavojnice iznosi:

$$\frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{4}CU^2 = 3.75 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{J}$$ 1 bod

Maksimalna je struja:

$$I = U\sqrt{\frac{C}{2L}} = 25\ \mathrm{mA}$$ 1 bod

Zadatak 4. (10 bodova)
Kuglica mase 20 g obješena je o nit nepoznate duljine i njiše se kao matematičko njihalo. Takvo matematičko njihalo nalazi se između dviju suprotno nabijenih paralelnih metalnih ploča razmaknutih 10 cm i spojenih na neki napon *U*. Dok je napon isključen, kuglica se njiše s periodom 0.9 s. Kada uključimo napon 10 V, period se skrati za 0.05 s. Odredite naboj na kuglici. Za dobiveni naboj i pri uključenom naponu odredite za koji će se ravnotežni kut otkloniti kuglica kada se ne njiše.



Rješenje:
Dok je napon isključen, na kuglicu djeluje samo sila teža, zbog čega njiše s periodom

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$ 1 bod

Iz čega možemo dobiti duljinu njihala:

$$l = \frac{gT_0^2}{4\pi^2} = 20.13 \text{ cm}$$

Uključimo li napon U, u prostoru između ploča javit će se električno polje:

$$E = \frac{U}{d}$$ 0.5 bod

Električno polje djelovat će na kuglicu naboja q silom

$$F_{el} = qE = \frac{qU}{d}$$ 0.5 bod

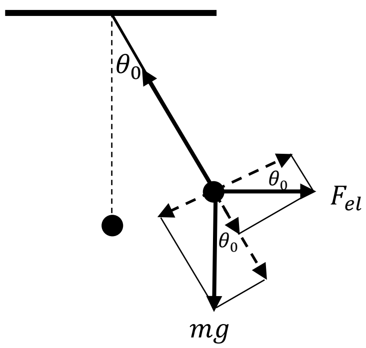
koja je uvijek okomita na silu težu.

U ravnotežnom položaju kuglica će biti otklonjena za kut θ_0 uslijed djelovanja električne sile (vidi sliku). Komponenta električne sile $F_{el}\cos\theta_0$ mora biti uravnotežena komponentom djelovanja sile teže $mg\sin\theta_0$:

$$qE\cos\theta_0 = mg\sin\theta_0$$ 1 bod

Kut otklona u ravnoteži u odnosu na vertikalni položaj iznosi:

$$\operatorname{tg}\theta_0 = \frac{qE}{mg} = \frac{qU}{mgd}$$ 1 bod



Zarotiramo li sustav za ovaj kut θ_0, rezultantna sila opet djeluje vertikalno prema dolje kao i kod klasičnog matematičkog njihala, ali sada s ubrzanjem:

$$g'^2 = g^2 + a^2$$ 1 bod

gdje je a ubrzanje uslijed djelovanja električne sile. Prema Newtonovu zakonu:

$$F_{el} = am = \frac{qU}{d}$$

dobijemo za ubrzanje električne sile:

$$a = \frac{qU}{md}$$ 1 bod

Novi period matematičkog njihala bit će sada:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}}$$ 1 bod

Za odrediti naboj q na kuglici, potrebno je iz gornje jednadžbe odrediti g':

$$g' = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$$ 1 bod

$$g'^2 = g^2 + a^2 = g^2 + \left(\frac{qU}{md}\right)^2$$

$$\left(\frac{qU}{md}\right)^2 = \left(\frac{4\pi^2 l}{T^2}\right)^2 - g^2$$

Konačno dobijemo:

$$q = \frac{md}{U} \cdot \sqrt{\left(\frac{4\pi^2 l}{T^2}\right)^2 - g^2}$$

$$q = \frac{md}{U} \cdot \sqrt{\left(\frac{4\pi^2}{T^2}\frac{gT_0^2}{4\pi^2}\right)^2 - g^2}$$

$$q = \frac{md}{U} \cdot \sqrt{\left(\frac{gT_0^2}{T^2}\right)^2 - g^2} = \frac{md}{U} \cdot \sqrt{g^2\left(\frac{T_0}{T}\right)^4 - g^2}$$

$$q = g\frac{md}{U}\sqrt{\left(\frac{T_0}{T}\right)^4 - 1} = 9.94 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{C}$$ 1 bod

Kut otklona u ravnotežnom položaju u odnosu na vertikalu s uključenim naponom:

$$\operatorname{tg}\theta_0 = 0.507$$ 1 bod

$$\theta_0 = 26.88^\circ$$

Zadatak 5. (10 bodova)
Na primar transformatora spojen je izvor napona gradske mreže ($U_{eff} = 230\ \mathrm{V}$, $f = 50\ \mathrm{Hz}$). Na sekundar transformatora serijski su spojeni zavojnica induktiviteta $L = 30\ \mathrm{mH}$ i otpornik trošila $R = 500\ \Omega$. Za potpun opis realnog transformatora pretpostavite da je na primar transformatora serijski spojen otpornik $R_1 = 130\ \Omega$ koji odgovara otporu žica primarnog navoja (uključujući i ekvivalentne gubitke u željeznoj jezgri), dok je na sekundar serijski spojen otpornik $R_2 = 20\ \ \Omega$ koji odgovara otporu žica u sekundaru. Primar transformatora čini 2000 zavoja, a sekundar ima 500 zavoja. Pretpostavite da su svi otpori i reaktancije takve da su svi naponi i struje, i na primaru i na sekundaru, iste faze.
Koliko iznosi unutarnji otpor spojene zavojnice ako se na otporniku trošila troši $P = 5.5\ \mathrm{W}$ snage?

Rješenje.
Zbog gubitaka u transformatoru koje možemo prikazati serijski spojenim otpornikom R_1, napon na primaru idealnog transformatora umanjen je i iznosi ($U_0 = U_{eff} = 230\ \mathrm{V}$):

$$U_1 = U_0 - I_1 R_1$$ 1 bod

Na sekundaru idealnog transformatora napon iznosi:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} = 4$$ 1 bod

Impedancija sekundarnog kruga iznosi:

$$Z_2 = \sqrt{(R_2 + R_L + R)^2 + (\omega L)^2}$$ 1 bod

Primijetimo da je $\omega L \ll R_2 + R$, odnosno da je pomak u fazi

$$\phi \le \arctan \frac{\omega L}{R_2 + R} = 1.04°$$

što znači da su struja i napon u sekundarnom krugu približno u fazi kako je i navedeno u pretpostavci zadatka.
Prema tome, možemo jednostavnije pisati za struju u sekundarnom krugu:

$$I_2 = \frac{U_2}{Z_2}$$ 1 bod

Pad napona na trošilu iznosi:

$$U = I_2 R$$

pa je snaga razvijena na trošilu:

$$P = U I_2 = I_2^2 R = U_2^2 \frac{R}{Z_2^2}$$ 1 bod

Za idealni transformator vrijedi za primar i sekundar:

$$P_1 = P_2$$

$$U_1 I_1 = U_2 I_2$$

$$\frac{I_2}{I_1} = 4$$ 1 bod

Preostaje nam riješiti sustav jednadžbi za dobiti U_2:

$$U_1 = U_0 - I_1 R_1$$
$$U_2 = I_2 Z_2$$
$$U_1 = 4U_2$$
$$I_2 = 4I_1$$

1 bod

Nadalje:

$$4U_2 = U_0 - I_1 R_1$$
$$U_2 = 4I_1 Z_2$$

Konačno

$$4U_2 = U_0 - \frac{U_2 R_1}{4Z_2}$$

pa za U_2 dobijemo:

$$U_2 \left(4 + \frac{R_1}{4Z_2}\right) = U_0$$

$$U_2 \left(\frac{16Z_2 + R_1}{4Z_2}\right) = U_0$$

$$U_2 = U_0 \left(\frac{4Z_2}{16Z_2 + R_1}\right)$$

1 bod

Uvrstimo u izraz za snagu i dobijemo:

$$P = U_0^2 \frac{16Z_2^2}{(16Z_2 + R_1)^2} \frac{R}{Z_2^2}$$

$$P = U_0^2 \frac{16R}{(16Z_2 + R_1)^2}$$

$$16Z_2 + R_1 = 4U_0 \sqrt{\frac{R}{P}}$$

$$Z_2 = \frac{U_0}{4} \sqrt{\frac{R}{P}} - \frac{R_1}{16} = 540.116\ \Omega$$

1 bod

Konačno:

$$Z_2^2 = (R_2 + R_L + R)^2 + (\omega L)^2$$

$$R_L = \sqrt{Z_2^2 - (\omega L)^2} - R_2 - R$$

$$R_L = 20.03\ \Omega$$

1 bod

Županijsko natjecanje iz fizike

srednja škola – četvrta skupina

25. veljače 2026.

1. Mali predmet postavljen ispred sfernog zrcala daje na zastoru dvaput veću sliku od predmeta. Pomicanjem predmeta i zastora dobije se tri puta veća slika. Zastor je pritom pomaknut za 12 cm. Odredite je li predmet pomaknut prema zrcalu ili od njega, i izračunajte za koliko je pomaknut.

- Budući da se slika stvara na zastoru, riječ je o realnoj slici, što znači da je riječ o konkavnom zrcalu. Kako je slika realna i uvećana, predmet se u oba slučaja mora nalaziti između žarišta i centra zakrivljenosti. Kako bi se povećanje povećalo s dva na tri, zastor treba udaljiti od zrcala. [1 bod]
- Koristimo jednadžbu zrcala:
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$
i formulu za povećanje:
$$m = \frac{b}{a}$$
- Prije pomicanja imamo povećanje $m_1 = 2$, što znači da je $b_1 = 2a_1$. Uvrštavanjem u jednadžbu zrcala dobivamo:
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{2a_1} = \frac{3}{2a_1} \implies a_1 = \frac{3}{2}f \quad \text{i} \quad b_1 = 3f$$ [1 bod]
- Nakon pomicanja imamo povećanje $m_2 = 3$, što znači da je $b_2 = 3a_2$. Uvrštavanjem u jednadžbu zrcala dobivamo:
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a_2} + \frac{1}{3a_2} = \frac{4}{3a_2} \implies a_2 = \frac{4}{3}f \quad \text{i} \quad b_2 = 4f$$ [1 bod]
- Znamo da je zastor pomaknut za 12 cm dalje od zrcala:
$$b_2 - b_1 = 4f - 3f = d \implies f = d$$ [1 bod]
Žarišna duljina zrcala iznosi 12 cm. [1 bod]
- Razlika udaljenosti predmeta pomicanjem je:
$$\Delta a = a_1 - a_2 = \frac{3}{2}f - \frac{4}{3}f = \frac{f}{6}$$ [1 bod]
$$\Delta a = 2 \text{ cm}$$ [1 bod]
- Predmet treba približiti za 2 cm prema zrcalu. [1 bod]

2. Koherentni izvor svjetlosti nalazi se na visini $d = 0.1\,\text{cm}$ iznad ravnog zrcala. Nasuprot izvoru postavljen je vertikalni zastor na kojemu se pojavljuje interferencijska slika. Udaljenost zastora od izvora mnogo je veća od visine d. U početnom trenutku izvor se počinje jednoliko udaljavati od ravnine zrcala brzinom $v = 2\,\text{cm/s}$.

   (a) Izrazite uvjet za konstruktivnu interferenciju pomoću valne duljine λ, udaljenosti zastora od izvora D, udaljenosti izvora od ravnog zrcala d, rednog broja maksimuma m i pripadne udaljenosti od središnjeg maksimuma y_m.

   (b) Nakon koliko se vremena razmak pruga promijeni za faktor 2?

- Zrcalo stvara virtualnu sliku izvora na udaljenosti d s druge strane zrcala. Na zastor tada efektivno djeluju dva izvora na međusobnoj udaljenosti $2d$. Situacija je slična Youngovu pokusu, ali uz bitnu razliku: val iz virtualnog izvora ima dodatni pomak u fazi od π u odnosu na realni izvor, jer se zraka reflektirala na optički gušćem sredstvu. [2 boda]
- Razlika hoda zraka:
$$\Delta x = \frac{2dy_m}{D}$$ [1 bod]
- Faznoj razlici treba dodati doprinos zbog refleksije (π):
$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x + \pi = \frac{4\pi d y_m}{\lambda D} + \pi$$ [1 bod]
- Konstruktivna interferencija nastaje tamo gdje je fazna razlika jednaka cjelobrojnom višekratniku od 2π:
$$\frac{4\pi d y_m}{\lambda D} + \pi = 2m\pi \iff \frac{4dy_m}{\lambda D} + 1 = 2m \iff y_m = \frac{\lambda D}{4d}(2m-1)$$ [1 bod]
- Širina pruge jednaka je razlici položaja susjednih maksimuma $\Delta y = y_m - y_{m-1}$:
$$\Delta y = \frac{\lambda D}{2d}$$ [1 bod]
- U situaciji kada se izvor udaljava od zrcala brzinom v, udaljenost $2d$ zamjenjujemo s $2(d+vt)$:
$$\Delta y(t) = \frac{\lambda D}{2(d+vt)}$$ [2 boda]
- Kako se izvor udaljava od zrcala (d raste), širina pruga se može jedino smanjiti za faktor 2. [1 bod]
- Ako se širina pruga smanji za faktor 2 u vremenu t', vrijedi:
$$\Delta y(t') = \frac{\Delta y(t_0)}{2} = \frac{\lambda D}{2(d+vt')} \Rightarrow t' = \frac{1}{v}\left(\frac{\lambda D}{\Delta y(t_0)} - d\right) = \frac{d}{v}$$ [1 bod]
- Širina se smanji za faktor 2 nakon vremena $t = 50\,\text{ms}$. [1 bod]

3. U Youngovu pokusu koriste se dvije pukotine nejednakih širina. Zbog razlike u širinama, titranje polja koje dolazi iz šire pukotine ima dvostruko veću amplitudu od onoga iz uže. Koherentna svjetlost iz obiju pukotina interferira na zaslonu. Intenzitet svjetlosti u svakoj točki zaslona proporcionalan je kvadratu iznosa rezultantnog vektora električnog polja, koji se dobiva superpozicijom doprinosa iz obiju pukotina. U točkama konstruktivne interferencije mjeri se maksimalni intenzitet iznosa I_m.

   (a) Izvedite izraz za kvadrat rezultantne amplitude A_R^2 u točki s faznom razlikom ϕ pomoću amplituda A_1, A_2 i fazne razlike ϕ.

   (b) Izvedite izraz za intenzitet I na zaslonu u ovisnosti o maksimalnom intenzitetu I_m i faznoj razlici ϕ.

   (c) Odredite intenzitet na mjestu gdje je fazna razlika $\phi = \pi$. Rezultat iskažite preko I_m.

- Odnos amplituda i maksimalni intenzitet: Neka je $A_2 = A$, tada je $A_1 = 2A$. Maksimalna amplituda je:

$$A_{max} = A_1 + A_2 = 3A \qquad \text{[1 bod]}$$

- Budući da je intenzitet proporcionalan kvadratu amplitude ($I = kA^2$), slijedi:

$$I_m = k(3A)^2 = 9kA^2 \implies kA^2 = \frac{I_m}{9} \qquad \text{[1 bod]}$$

- Pretpostavimo da u nekoj točki na zaslonu interferiraju dva vala:
  - Prvi val: $E_1 = A_1 \sin(\omega t)$
  - Drugi val: $E_2 = A_2 \sin(\omega t + \phi)$ (gdje je ϕ fazna razlika)
- Rezultantno polje je njihov zbroj: $E_R = E_1 + E_2$. [1 bod]
- Taj zbroj možemo prikazati kao zbrajanje dva vektora $\vec{A_1}$ i $\vec{A_2}$ koji zatvaraju kut ϕ. [1 bod]
- Prema geometrijskom pravilu za zbrajanje vektora:

$$A_R^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos(180^\circ - \phi) \qquad \text{[1 bod]}$$

- Kvadrat rezultantne amplitude za fazu ϕ:

$$A_R^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\phi$$

  Uvrštavanjem $A_1 = 2A$ i $A_2 = A$:

$$I = k(4A^2 + A^2 + 4A^2\cos\phi) = kA^2(5 + 4\cos\phi) \qquad \text{[1 bod]}$$

- Uvrštavanjem $kA^2 = I_m/9$:

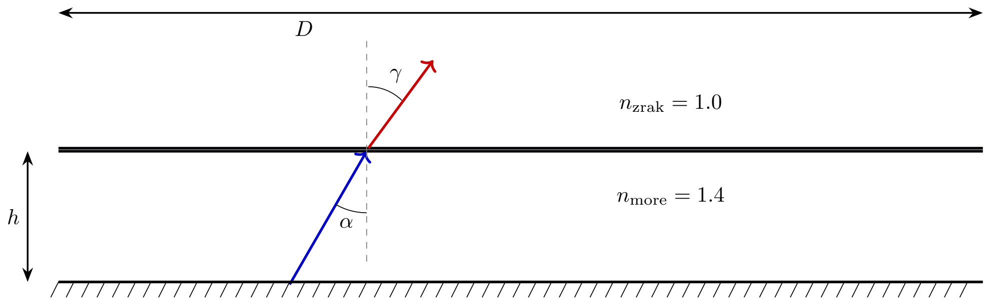
$$I = \frac{I_m}{9}(5 + 4\cos\phi) \qquad \text{[2 boda]}$$

- Intenzitet za $\phi = \pi$:

$$I = \frac{I_m}{9}(5 - 4) = \frac{1}{9}I_m \qquad \text{[1 bod]}$$

  Primijetite da intenzitet u "minimumu" nije nula jer se amplitude ne poništavaju potpuno.

4. Na dnu brodice napravljen je okrugli stakleni prozorčić za promatranje morskog dna. Promjer prozorčića jednak je $D = 40\,\mathrm{cm}$, a debljina stakla je zanemariva. Izračunajte maksimalnu površinu dna koja se vidi kroz prozorčić. Indeks loma morske vode je 1.4, a dno je udaljeno od prozorčića $h = 5\,\mathrm{m}$.



- Svjetlost s dna lomi se na granici more–zrak te dolazi do oka promatrača. Prema Snellovom zakonu vrijedi:

$$n_w \sin\alpha = n_z \sin\gamma \qquad [1\ \text{bod}]$$

- Osoba može vidjeti samo one zrake koje uspiju izaći iz mora u zrak. Granični slučaj nastaje kada zraka u zrak izlazi pod kutom $\gamma = 90^\circ$ (totalna refleksija).

$$n_w \sin\alpha_{max} = 1 \implies \sin\alpha_{max} = \frac{1}{n_w} \qquad [2\ \text{boda}]$$

- Zraka koja ulazi u prozorčić pod maksimalnim kutom α_{max} dolazi s ruba vidljivog kruga na dnu. Maksimalnu površinu vidimo kada je oko prislonjeno uz prozorčić. Tada se vidni stožac širi od rubova prozorčića, pa ukupni polumjer vidljivog kruga na dnu (R_{tot}) čine polumjer prozorčića r i horizontalni doseg zrake pod graničnim kutom $R = h \cdot \mathrm{tg}\ \alpha_{max}$.
- Ukupni polumjer vidljivog kruga na dnu tada iznosi:

$$R_{tot} = R + r = h \cdot \mathrm{tg}\ \alpha_{max} + r \qquad [2\ \text{boda}]$$

  Čim se oko odmakne od prozorčića, vidno polje se smanjuje jer rubovi prozorčića postaju fizička zapreka.

- Koristimo trigonometrijsku vezu $\mathrm{tg}\ \alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$:

$$\mathrm{tg}\ \alpha_{max} = \frac{\frac{1}{n_w}}{\sqrt{1-\frac{1}{n_w^2}}} = \frac{1}{\sqrt{n_w^2 - 1}} \qquad [1\ \text{bod}]$$

- Izračunamo R i R_{tot}:

$$R = \frac{h}{\sqrt{n_w^2 - 1}} = 5.103\,\mathrm{m} \qquad [1\ \text{bod}]$$

$$R_{tot} = 5.103\,\mathrm{m} + 0.2\,\mathrm{m} = 5.303\,\mathrm{m} \qquad [1\ \text{bod}]$$

- Maksimalna površina dna koja se vidi kroz prozorčić je:

$$S = R_{tot}^2 \pi$$

  Uvrštavanjem brojeva:

$$S = 88.35\,\mathrm{m}^2 \qquad [1\ \text{bod}]$$

5. Uski snop monokromatske svjetlosti iz izvora S valne duljine $\lambda = 600\,\mathrm{nm}$ širi se duž pozitivnog smjera x-osi i pada na zrcalo. Okomica na zrcalo zatvara jednake kutove s negativnim smjerom x-osi i pozitivnim smjerom y-osi. Zrcalo ima refleksivnost jednaku jedan; drugim riječima, zrcalo je savršeni reflektor. Električki izolirana metalna ploha ukupne površine $10\,\mathrm{m}^2$ postavljena je paralelno s x-osi i iznad zrcala kako bi primila odbijenu zraku. Izlazni rad metala je $W_0 = 1.90\,\mathrm{eV}$. U prosjeku jedan od pedeset upadnih fotona uzrokuje emisiju fotoelektrona, a generirani fotoelektroni odmah se uklanjaju iz okoline. Snaga izvora je $P = 10\,\mathrm{mW}$. Pretpostavite da je metalna površina velika i zanemarite rubne efekte, te da naboj nakupljen na ploči ne utječe na proces emisije fotoelektrona.

   (a) Izračunajte iznos sile kojom snop djeluje na zrcalo.

   (b) Izračunajte površinsku gustoću naboja na metalnoj površini nakon $t = 0.1\,\mathrm{s}$.

   (c) Odredite maksimalnu kinetičku energiju emitiranih elektrona.

- Svaki pojedinačni foton nosi impuls iznosa $p = \frac{h}{\lambda}$. [1 bod]
- Prilikom sudara sa zrcalom, mijenja se samo komponenta impulsa okomita na površinu zrcala, dok paralelna komponenta ostaje ista. Budući da okomica na zrcalo zatvara jednake kutove s negativnom x-osi i pozitivnom y-osi, kut upada iznosi $\alpha = 45°$. [1 bod]
- Promjena impulsa jednog fotona pri refleksiji iznosi:

$$\Delta p_{\mathrm{foton}} = p\cos\alpha - (-p\cos\alpha) = 2\frac{h}{\lambda}\cos\alpha$$ [2 boda]

- Ukupna sila F na zrcalo jednaka je ukupnoj promjeni impulsa svih fotona u jedinici vremena. Ako je N broj fotona koji udare u zrcalo u jednoj sekundi, sila je:

$$F = N \cdot \Delta p_{\mathrm{foton}}$$ [1 bod]

- Broj fotona N (u jednoj sekundi) izračunamo iz snage izvora P i energije jednog fotona $E_f = \frac{hc}{\lambda}$:

$$N = \frac{P}{E_f} = \frac{P\lambda}{hc}$$ [1 bod]

- Uvrštavanjem izraza za N i $\Delta p_{\mathrm{foton}}$, dobivamo:

$$F = \frac{P\lambda}{hc} \cdot 2\frac{h}{\lambda}\cos\alpha = \frac{2P}{c}\cos\alpha$$ [1 bod]

- Uvrštavanjem vrijednosti:

$$F = 4.714 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N}$$ [1 bod]

- Za izračun gustoće naboja, najprije odredimo energiju fotona:

$$E_f = \frac{hc}{\lambda} = 3.313 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J} = 2.068\,\mathrm{eV}$$

- Broj izbačenih elektrona u vremenu t ovisi o efikasnosti, tj. udjelu fotona koji uzrokuju emisiju fotoelektrona ($\eta = \frac{1}{50} = 0.02$):

$$N_e = \eta \cdot \frac{P}{E_f} \cdot t \qquad [1 \text{ bod}]$$

- Površinska gustoća naboja σ na metalnoj površini $A = 10\,\mathrm{m}^2$ nakon $t = 0.1\,\mathrm{s}$ iznosi:

$$\sigma = \frac{\eta \cdot P \cdot e \cdot t}{E_f \cdot A} \qquad [1 \text{ bod}]$$

$$\sigma = 9.671 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{C/m^2} \qquad [1 \text{ bod}]$$

- Kinetička energija emitiranih elektrona određena je Einsteinovom jednadžbom:

$$E_{k,max} = E_f - W_0$$

$$E_{k,max} = 2.068\,\mathrm{eV} - 1.90\,\mathrm{eV} \qquad [1 \text{ bod}]$$

- Maksimalna kinetička energija emitiranih elektrona je $0.168\,\mathrm{eV}$. [1 bod]