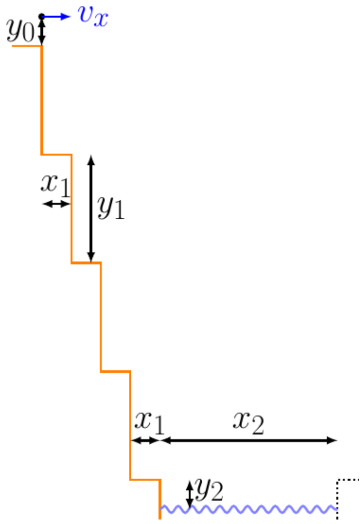
**Županijsko natjecanje iz fizike 2024./2025.**

**Srednje škole – 1. skupina**

VAŽNO: Tijekom ispita učenici se ne smiju koristiti nikakvim pisanim materijalom (knjigama, bilježnicama, formulama...). Za pisanje treba se koristiti kemijskom olovkom ili nalivperom. Učenici pri ruci ne smiju imati mobitel ni druge elektroničke uređaje osim kalkulatora.

KONSTANTE: Uzmite za ubrzanje slobodnoga pada $g = 9.81\ \mathrm{m/s^2}$.




**1. zadatak (10 bodova)**

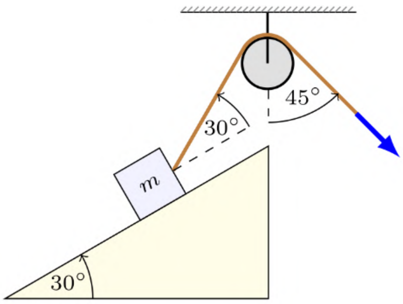
Nada vodoravno baci kamen s ruba ograđene litice u obliku 4 pravokutne stepenice, svaka visine $y_1 = 10.5\ \mathrm{m}$ i širine $x_1 = 3\ \mathrm{m}$. Na udaljenosti $x_1$ od najdonje stepenice nalazi se rijeka širine $x_2 = 18\ \mathrm{m}$, čija je razina vode $y_2 = 80\ \mathrm{cm}$ niža od podnožja litice. Kamen upada točno po sredini rijeke. Strujanje vjetra čini otpor zraka zanemarivim. Koliko iznosi početna brzina $v_x$ kojom je Nada bacila kamen $y_0 = 134.5\ \mathrm{cm}$ iznad najgornje stepenice? Koliko iznosi konačna brzina kamena netom prije upada u rijeku?

**2. zadatak (10 bodova)**

U automobilu slobodno visi miris mase $10\ \mathrm{g}$ obješen o nerastezljivu nit zanemarive mase. Automobil, čija brzina u početnom trenutku iznosi $36\ \mathrm{km/h}$, ubrzava na ravnoj cesti duž nizbrdice konstantnog nagiba te nakon $10\ \mathrm{s}$ postiže brzinu od $72\ \mathrm{km/h}$. Nacrtajte dijagram sila na miris te odredite napetost niti ako prilikom ubrzanja automobila nit i miris stoje okomito na cestu.

**3. zadatak (10 bodova)**

Hrvoje nerastezljivim užetom zanemarive mase prebačenim preko koloture zanemarive mase obješene o strop pridržava nepomičan blok mase $m = 99\ \mathrm{kg}$ koji leži na kosini nagiba 30°. Uže s kosinom zatvara kut od 30°, a na drugome kraju 45° s vertikalom. Faktor trenja bloka i kosine iznosi $\sqrt{3}/4$ . Odredite minimalni iznos sile kojom Hrvoje mora djelovati, a da blok ostane u stanju mirovanja.




**4. zadatak (10 bodova)**

Petar baci ključeve vertikalno uvis s visine $1500\ \mathrm{mm}$ od tla. Jednu sekundu nakon toga Andrijana kroz prozor uhvati ključeve na visini $5595\ \mathrm{mm}$ od tla. Zanemarite otpor zraka. Kolikom brzinom i u kojemu su se smjeru gibali ključevi netom prije hvatanja? Obrazložite.

**5. zadatak (10 bodova)**

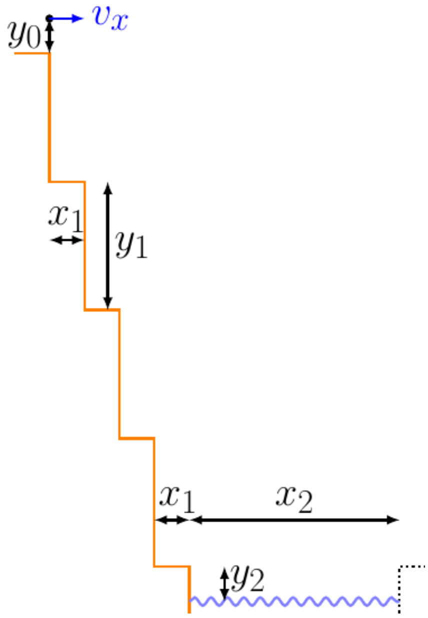
Vatrogasni avion djeluje takvom silom da cijelo vrijeme leti vodoravno na visini $61.6\ \mathrm{m}$ iznad ravnice, jednoliko brzinom $144\ \mathrm{km/h}$ u odnosu na tlo, od juga prema sjeveru. Suprotno gibanju aviona širi se požar ravnicom konstantnom brzinom $7.2\ \mathrm{km/h}$. Avion ispušta $5\ \mathrm{t}$ vode koja upada od $1\ \mathrm{m}$ prije ruba požara nadalje. Vjetar i otpor zraka djeluju na ispuštenu vodu stalnom silom od $10\ 550\ \mathrm{N}$ prema gore te $20\ \mathrm{kN}$ od sjevera prema jugu. Koliko su bili udaljeni avion i požar u trenutku ispuštanja vode?

**Županijsko natjecanje iz fizike 2024./2025.**
**Srednje škole – 1. skupina**

**Rješenja i smjernice za bodovanje**

U smjernicama je naveden samo jedan mogući način rješavanja, a treba priznati i bilo koji drugi ispravan postupak. Boduju se i drugi zapisi ako su u skladu s odabranim referentnim sustavom i napisanim jednadžbama u mjernim jedinicama po slobodnom izboru. Ako su preskočene trivijalne linije koje se boduju, a jednadžbe u nastavku su dobre, priznaju se bodovi kao da je napisano sve. Ne boduju se formule u kojima je upisan kriv iznos neke fizičke veličine. Dodjeljuju se samo cjelobrojni bodovi.

**1. zadatak (10 bodova)**




Modeliramo kamen kao točkasto tijelo u horizontalnom hitcu koje u vertikalnom smjeru ($y$) prijeđe visinu izbačaja od zadnje stepenice $y_0 = 1.345\ \mathrm{m}$, 4 stepenice visine $y_1 = 10.5\ \mathrm{m}$ i dio visine korita rijeke do vode $y_2 = 0.8\ \mathrm{m}$,

**[1 bod]** $y = y_0 + 4y_1 + y_2 = 44.145\ \mathrm{m}.$

Tijelo u smjeru $y$ slobodno pada jednolikom akceleracijom $g$

**[1 bod]** $y = gt^2/2 \Longrightarrow t = \sqrt{2y/g}$

**[1 bod]** $t = 3\ \mathrm{s}$ (boduje se samo točan rezultat).

U horizontalnom ($x$) smjeru tijelo se giba jednoliko pa iz dometa

**[1 bod]** $x = 4x_1 + x_2/2 = 21\ \mathrm{m}$ (boduje se samo točan rezultat)

možemo procijeniti početnu brzinu (brzinu izbačaja) u horizontalnom smjeru koja se ne mijenja tijekom gibanja

**[1 bod]** $v_x = x/t$

**[1 bod]** $v_x = 7\ \mathrm{m/s}$ (boduje se samo točan rezultat).

U smjeru $y$ tijelo za vrijeme pada jednoliko ubrzava akceleracijom $g = 9.81\ \mathrm{m/s^2}$ pa netom prije udara vertikalna komponenta brzine iznosi

**[1 bod]** $v_y = gt$

**[1 bod]** $v_y = 29.43\ \mathrm{m/s}.$

Ukupnom iznosu brzine netom prije udara pridonose horizontalna i vertikalna komponenta

**[1 bod]** $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

**[1 bod]** $v \approx 30.25\ \mathrm{m/s}.$

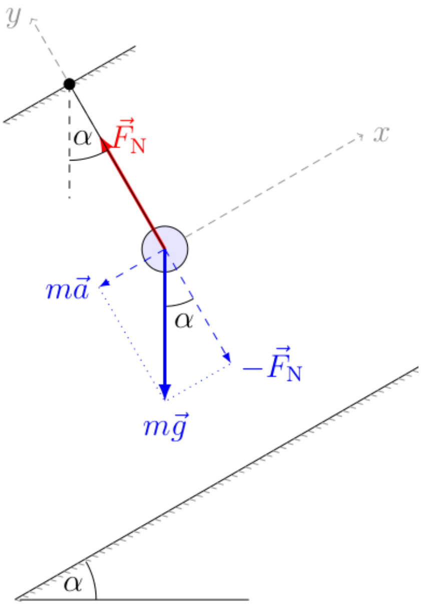
**2. zadatak (10 bodova)**

Modeliramo miris kao točkasto tijelo mase $m = 10\ \mathrm{g} = 0.01\ \mathrm{kg}$ koje visi okomito na kosinu (cestu). Djeluju sile prikazane na donjoj slici (boduju se pravilne orijentacije sila, prikazane samostalno i/ili preko komponenti, prikazane strelicama čije duljine ne moraju biti sumjerljive iznosima sila):

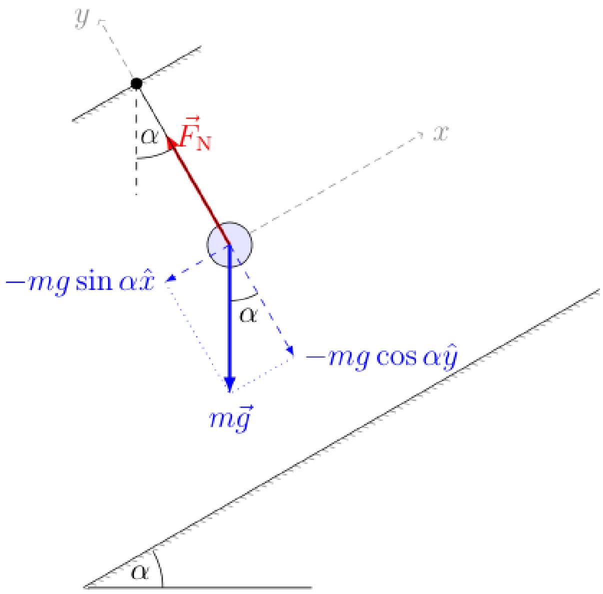
**[1 bod]** **napetost niti** okomito na kosinu (prema gore),

**[1 bod]** **gravitacijska sila** koju rastavljamo na komponentu okomitu na kosinu i niz kosinu,

**[1 bod]** s označenim kutom $\alpha$ između kosine i tla sukladnim kutu između okomica na tlo i kosinu, a može biti dodana i inercijalna sila $-m\vec{a}$ ako se promatra iz sustava automobila umjesto sustava vezanog uz tlo.




ili




Automobil tijekom vremenskog intervala $\Delta t = 10\ s$ ubrzava jednoliko od početne brzine

**[1 bod]** $v_0 = 36\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 36 \cdot \frac{1000\ \mathrm{m}}{3600\ \mathrm{s}} = 10\ \mathrm{m/s}$

do konačne brzine

**[1 bod]** $v_t = 72\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 72 \cdot \frac{1000\ \mathrm{m}}{3600\ \mathrm{s}} = 20\ \mathrm{m/s}$

iz čega možemo procijeniti akceleraciju

**[1 bod]** $a = (v_t - v_0)/\Delta t = (10\ \mathrm{m/s})\ /(10\ \mathrm{s}) = 1\ \mathrm{m\ s^{-2}}$.

Napetost niti poništava komponentu gravitacijske sile okomitu na kosinu, a nit stoji okomito na kosinu što znači da se obješeni miris giba istim ubrzanjem kao automobil pod djelovanjem neponištene komponente gravitacijske sile paralelne kosini

**[1 bod]** koja prema II. Newtonovu zakonu iznosi $ma$, odnosno $ma = mg\sin\alpha$. Alternativno, promatrano iz sustava automobila $ma$ interpretiramo kao inercijalnu silu koja uravnotežuje.

**[1 bod]** Dakle, katete $F_\mathrm{N}$ i $ma$ s hipotenuzom $mg$ tvore pravokutni trokut, odnosno dodatno možemo odrediti kut $\alpha$ iz $\sin\alpha = a/g$,

$\alpha = \arcsin(a/g) \approx 0.1021\ \mathrm{rad} \approx 5.85°$

pa $\cos\alpha$ možemo izračunati direktno iz ili koristeći identitet $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ iz kojega je $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$. Iz spomenutog pravokutnog trokuta slijedi napetost niti

**[1 bod]** $F_\mathrm{N} = \sqrt{(mg)^2 - (ma)^2}$ ili $F_\mathrm{N} = mg\cos\alpha = mg\sqrt{1 - \sin^2\alpha}$,

**[1 bod]** $F_\mathrm{N} = mg\sqrt{1 - (a/g)^2} \approx 97.6\ \mathrm{mN}$.

**3. zadatak (10 bodova)**

Postavimo Kartezijev koordinatni sustav tako da je blok u ishodištu, os $x$ orijentirana uz kosinu, a os $y$ okomita na kosinu orijentirana prema gore.

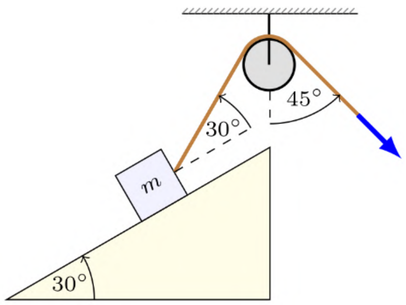
Djeluju samo sile prikazane na donjoj slici (boduju se pravilne orijentacije sila, prikazane samostalno i/ili preko komponenti, prikazane strelicama čije duljine ne moraju biti sumjerljive iznosima sila):

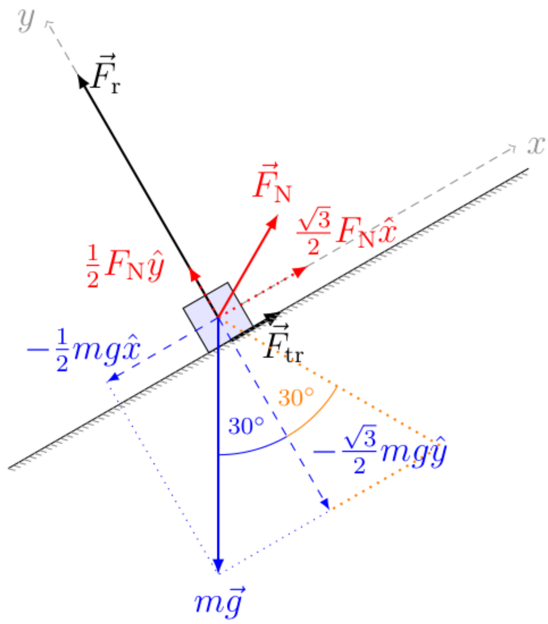
**[1 bod]** **gravitacijska sila** $m\vec{g}$ koju rastavljamo na komponente koje se mogu izraziti iz jednakostraničnog/pravokutnog trokuta: paralelnu s kosinom (niz kosinu) kao $mg/2$ ili $mg\sin 30°$ te okomitu na kosinu (prema dolje) kao $mg\sqrt{3}/2$ ili $mg\cos 30°$;

**[1 bod]** **napetost užeta** $\vec{F}_{\mathrm{N}}$ pod kutom od 30° s kosinom (nije prikazano radi previše detalja) čije komponente slijede kao za gravitacijsku silu iz sličnog jednakostraničnog trokuta;

**[1 bod]** **sila trenja** $\vec{F}_{\mathrm{tr}}$ koja djeluje uz kosinu (pomaže da blok ne klizi prema dolje) jer promatramo granični slučaj minimalne sile kojom djeluje Hrvoje $F_{\mathrm{H}}$ (zbog koloture $F_{\mathrm{H}} = F_{\mathrm{N}}$).

**[1 bod]** **reakcija podloge** $\vec{F}_r$ (okomito na kosinu).




Priznaju se svi bodovi u nizu ako su preskočene očite linije i napisana gotova jednadžba, npr. odmah uračunato $a_x = a_y = 0$ (ravnoteža) ili napisano objedinjeno, a ne po komponentama.

Primjenom II. Newtonova zakona na sile u smjeru $x$ i $y$ dobivamo sustav jednadžbi:

**[1 bod]** $F_{\mathrm{N}}\sqrt{3}/2 - mg/2 + F_{\mathrm{tr}} = ma_x = 0$ ili $F_{\mathrm{N}}\cos\alpha - mg\sin\alpha + F_{\mathrm{tr}} = ma_x = 0,$ (1)

**[1 bod]** $F_{\mathrm{r}} + F_{\mathrm{N}}/2 - mg\sqrt{3}/2 = ma_y = 0$ ili $F_{\mathrm{r}} + F_{\mathrm{N}}\sin\alpha - mg\cos\alpha = ma_y = 0.$ (2)

Iz (2) slijedi reakcija podloge

**[1 bod]** $F_{\mathrm{r}} = mg\sqrt{3}/2 - F_{\mathrm{N}}/2$

**[1 bod]** pa sila trenja iznosi $F_{\mathrm{tr}} = \mu F_{\mathrm{r}} = \mu mg\sqrt{3}/2 - \mu F_{\mathrm{N}}/2.$ (3)

Uvrštavanjem (3) u (1) dobivamo napetost niti

**[1 bod]** $F_{\mathrm{N}} = mg(1/2 - \mu\sqrt{3}/2)/(\sqrt{3}/2 - \mu/2) = mg(1/2 - 3/8)/(\sqrt{3}/2 - \sqrt{3}/8)$

$F_{\mathrm{N}} = mg/(3\sqrt{3}) = mg\sqrt{3}/9 \approx 0.19245mg.$

Minimalna sila kojom Hrvoje mora djelovati, zbog koloture (neovisno o danom kutu 45°), jednaka je napetosti užeta

**[1 bod]** $F_H = F_{\mathrm{N}} \approx 186.91\ \mathrm{N}.$

**4. zadatak (10 bodova)**

Ključeve promatramo kao vertikalni hitac prema gore, odnosno tijelo u slobodnome padu s početnim položajem $y_0$ i početnom brzinom $v_0$ prema gore. Postavimo li sustav da pozitivna os $y$ gleda prema gore, akceleracija tijela iznosi

**[1 bod]** $a = -g = -9.81\ \mathrm{m}/s^2$.

Ako je ishodište referentnog sustava na tlu, početni i konačni položaj tijela iznose (boduju se i drugi izbori ako su u skladu s odabranim referentnim sustavom u bilo kojim jedinicama):

**[1 bod]** $y_0 = 1.500\ \mathrm{m}$,

**[1 bod]** $y_t = 5595\ \mathrm{mm} = 5.595\ \mathrm{m}$.

Visina na kojoj se tijelo nalazi u konačnom trenutku $t = 1\ s$ iznosi

**[1 bod]** $y_t = y_0 + v_0 t - 0.5 g t^2$

pa je početna brzina

**[1 bod]** $v_0 = (y_t - y_0 + 0.5 g t^2)/t$

**[1 bod]** $v_0 = 9\ \mathrm{m}/s$

dok je konačna brzina

**[1 bod]** $v_t = v_0 - gt$

**[1 bod]** $v_t = -0.81\ \mathrm{m}/s$ (boduje se samo nezaokružen, odnosno egzaktan rezultat).

**[1 bod]** Tijelo se giba prema dolje

**[1 bod]** jer je konačna brzina netom prije hvatanja negativna.

**5. zadatak (10 bodova)**

Zadani problem modeliramo slično horizontalnom hitcu s ubrzanjem prema dolje, manjim od $g$ te horizontalnim usporavanjem. Naime, na tijelo (vodu) osim gravitacijske sile $m\vec{g}$ prema dolje, djeluje sila otpora zraka i vjetra, horizontalno $F_x = -20\,000\ \mathrm{N}$ suprotno gibanju aviona te $F_\mathrm{y} = -10\,500\ \mathrm{N}$ prema gore, pa tijelo mase $m = 5000\ \mathrm{kg}$ neće ubrzavati akceleracijom slobodnog pada $g$. Vertikalna akceleracija $a_y$ slijedi iz II. Newtonova zakona

**[1 bod]** $ma_y = mg + F_\mathrm{y}$ (ili ekvivalentno $-F_\mathrm{y}$ ako je $F_\mathrm{y}$ napisana kao pozitivna itd.)

**[1 bod]** $a_y = g + F_\mathrm{y}/m = 7.7\ \mathrm{m/s^2}$.

Tijelo jednolikom akceleracijom $a$, do udara o tlo, prelazi visinu $y = 61.6\ \mathrm{m}$,

**[1 bod]** $y = a_y t^2/2 = 61.6\ \mathrm{m}$

za vrijeme

**[1 bod]** $t = \sqrt{2y/a_y}$

**[1 bod]** $t = 4$ s (boduje se samo točan rezultat).

Avion leti jednoliko brzinom $v_\mathrm{A} = 144\ \mathrm{km/h} = 40\ \mathrm{m/}s$ pa za to vrijeme prelazi put $x_\mathrm{A} = v_\mathrm{A} t = 160\ \mathrm{m}$, dok voda u horizontalnom smjeru, s početnom brzinom $v_\mathrm{A}$, jednoliko usporavajući, pod djelovanjem vjetra i otpora zraka, akceleracijom

**[1 bod]** $a_\mathrm{x} = F_x/m = -4\ \mathrm{m/s^2}$

prelazi put

**[1 bod]** $x_\mathrm{V} = v_\mathrm{A} t + a_\mathrm{x} t = 128\ \mathrm{m}$.

Požar se također širi jednoliko brzinom iznosa $v_\mathrm{P} = 7.2\ \mathrm{km/h} = 2\ \mathrm{m/s}$ pa za to vrijeme prelazi put

**[1 bod]** $x_\mathrm{P} = v_\mathrm{P} t = 8\ \mathrm{m}$.

Vertikalna udaljenost požara i aviona iznosi $y = 61.6\ \mathrm{m}$ jer avion leti na stalnoj visini, a voda udara na udaljenosti $x_\mathrm{U} = 1\ \mathrm{m}$ ispred požara, pa je u trenutku ispuštanja vode horizontalna udaljenost aviona i požara

**[1 bod]** $x = x_\mathrm{V} + x_\mathrm{U} + x_\mathrm{P} = 137\ \mathrm{m}$.

Dakle, avion i požar u trenutku ispuštanja vode udaljeni su

**[1 bod]** $D = \sqrt{x^2 + y^2} \approx 150.2\ \mathrm{m}$.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ FIZIKE – 20. ožujka 2025.

Srednje škole – 2. skupina

Rješenja i smjernice za bodovanje

Upute za bodovanje: Ovdje je prikazan jedan način rješavanja zadataka. Ako učenici riješe zadatak na drugačiji, a fizikalno pravilan način, treba im dati puni broj bodova predviđen za taj zadatak. Ako učenici ne napišu posebno svaki ovdje predviđeni korak, a vidljivo je da su ga napravili, treba im dati bodove kao da su ga napisali. Najmanja jedinica bodova koja se dodjeljuje jest 1 bod.

**Zadatak 1.** (ukupno bodova: 10)

Promotrite pumpu za vodu čiji je otvor, površine poprečnog presjeka 5 $cm^2$, usmjeren direktno prema dolje te se nalazi 50 cm iznad plitkog korita. Ako pumpa pri radu postiže konstantni ukupni tlak od 1.1 atmosfera, odredite kolikom silom voda koja istječe iz nje djeluje na korito. Pretpostavite da nema prskanja ni razdvajanja toka vode te da se nakon kontakta s koritom voda u potpunosti prestane gibati. Uzmite da je gustoća vode 1 kg/L te da je tlak zraka 1 atmosfera.

**Rješenje:**

Napomena: ovaj je zadatak moguće riješiti bez međukoraka računanja vremena, koristeći se formulom za ovisnost brzine o prijeđenom putu u jednolikom ubrzanom gibanju. U slučaju kada učenik/ca ispravno iskoristi tu formulu, treba mu/joj dodijeliti sve bodove (sveukupno 3) koji bi se inače dodijelili za postupak pronalaženja rješenja za vrijeme.

Razmotrimo li ukupni tlak, možemo dobiti brzinu kojom voda istječe iz pumpe **(1 bod za poznavanje formule za ukupni tlak te 1 bod za ispravno izračunatu brzinu)**

$$\frac{1}{2}\rho v_0^2 = p_{\mathrm{uk}} - p_{\mathrm{atm}} \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{2(p_{\mathrm{uk}} - p_{\mathrm{atm}})}{\rho}} = 4.501 \text{ m/s}.$$

Nakon izlaska iz pumpe voda se nalazi u slobodnom padu te će vrijeme potrebno da ona dođe do korita biti opisano rješenjem sljedeće kvadratne jednadžbe **(1 bod za ispravnu jednadžbu koja opisuje vrijeme pada te 1 bod za uspješno pronalaženje korijena kvadratne jednadžbe)**

$$h = v_0 t_{\mathrm{pad}} + \frac{g t_{\mathrm{pad}}^2}{2} \quad \Rightarrow \quad t_{\mathrm{pad}\ 1,2} = -\frac{v_0}{g} \pm \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} + 2\frac{h}{g}},$$

pri čemu je $h$ visina s koje voda pada. Očito je ovdje samo pozitivan predznak fizikalan, pa je rješenje $t_{\mathrm{pad}} = 0.100$ s **(1 bod za točan rezultat za vrijeme)**.
Tada je brzina kojom se voda kreće pri sudaru jednaka **(1 bod za točan rezultat za konačnu brzinu)**

$$v_{\mathrm{kon}} = v_0 + g t_{\mathrm{pad}} = 5.482 \text{ m/s}.$$

U jedinici vremena iz pumpe istječe sljedeći volumen vode **(1 bod za točan rezultat za protok)**

$$I = \frac{\Delta V}{\Delta t} = v_0 A = 0.00225 \text{ m}^3/\text{s},$$

pri čemu je $A$ površina poprečnog presjeka otvora. Konačno, silu ćemo dobiti razmatranjem promjene količine gibanja, $\Delta p$ **(1 bod za poznavanje odnosa promjene količine gibanja i sile, 1 bod za ispravnu manipulaciju izraza kako bi se sila povezala s protokom te 1 bod za točan rezultat za silu)**

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t} v_{\text{kon}} = \rho \frac{\Delta V}{\Delta t} v_{\text{kon}} = \rho I v_{\text{kon}} = 12.337\ \text{N}\,.$$

**Zadatak 2.** (ukupno bodova: 9)

Odredite koliko je vremena potrebno kako bi kompresor napunio prazan čelični ronilački spremnik zrakom do pritiska od 200 atmosfera. Poznato je da spremnik ima volumen od 10 L te da mu je masa kada je prazan jednaka 16 kg. Osim toga, poznato je i da je specifični toplinski kapacitet čelika 420 J/kgK.

Pretpostavite da kompresor koji vrši punjenje ima efikasnost od 50 % te da radi konstantnom snagom od 1 kW, da se zrak može opisati kao dvoatomni idealni plin te da ga kompresor crpi iz atmosfere. Uzmite da je početna temperatura boce i zraka 290 K, dok je konačna 340 K. Zanemarite sve gubitke energije.

**Rješenje:**

Ukupna množina čestica plina u boci u konačnom stanju bit će **(1 bod za poznavanje jednadžbe stanja te 1 bod za ispravno izračunat $n$)**

$$n = \frac{p_{\mathrm{kon}} V_{\mathrm{kon}}}{R T_{\mathrm{kon}}} = 71.672\,\mathrm{mol}\,.$$

Iz ovoga slijedi da su unutarnje energije plina jednake **(1 bod za poznavanje jednadžbe za unutarnju energiju idealnog plina (ako učenik/ca koristi krivi predfaktor (recimo, 3/2) tada treba uskratiti ovaj bod, ali bodovati ostatak zadatka po principu „slijedi grešku”, dakle, dodijeliti sve ostale bodove praveći se da je iskorištena dobra formula)), 1 bod za ispravno izračunate obje energije**.

$$U_{\mathrm{kon}} = \frac{5}{2} n R T_{\mathrm{kon}} = 506.5\,\mathrm{kJ}\,, \quad U_{\mathrm{poč}} = \frac{5}{2} n R T_{\mathrm{poč}} = 432.014\,\mathrm{kJ}\,.$$

Toplina koja je potrebna za zagrijavanje spremnika je **(1 bod za ispravno korištenje jednadžbe s toplinskim kapacitetom te 1 bod za ispravno izračunat $\Delta Q_{\mathbf{boca}}$)**

$$\Delta Q_{\mathrm{boca}} = m_{\mathrm{boca}} c_{\mathrm{čelik}} \Delta T = 336\,\mathrm{kJ}\,.$$

Ukupna energija koju je potrebno uložiti za punjenje spremnika tada je **(1 bod za ispravno izračunatu energiju)**

$$\Delta W = \Delta Q + U_{\mathrm{kon}} - U_{\mathrm{poč}} = 410.486\,\mathrm{kJ}\,.$$

Radeći s efikasnošću od 50 %, kompresoru će trebati dvostruko duže negoli u slučaju kada bi imao savršenu efikasnost, stoga je ukupno vrijeme **(1 bod za ispravno korištenje efikasnosti te 1 bod za točan rezultat za vrijeme)**

$$\Delta t = 2 \frac{\Delta W}{P} = 820.972\,\mathrm{s}\,.$$

**Zadatak 3.** (ukupno bodova: 12)

Promotrite sustav sastavljen od tri beskonačno velika toplinska spremnika temperatura $T_1 = 500$ K, $T_2 = 250$ K i $T_3 = 200$ K (koje ćemo označiti rednim brojevima u skladu s indeksima temperatura) i 3 Carnotova stroja, koja ćemo označiti s A, B i C. Koristeći se tim oznakama možemo objasniti kako su strojevi spojeni na spremnike i međusobno:

Stroj A radi kao toplinski stroj te je spojen na prvi i drugi spremnik, primajući 1.5 kJ topline od toplijeg spremnika u svakom svom ciklusu. 50 % izlaznog rada tog stroja napušta sustav, čineći jedan od dvaju doprinosa ukupnom radu koji sustav vrši na okolinu, dok se preostalih 50 % izlaznog rada stroja A koristi kao ulazni rad za stoj B, koji je konfiguriran kao hladnjak te spojen na drugi i treći spremnik. Stroj B u jednom radnom ciklusu uzima 1.5 kJ topline od trećeg spremnika. Konačno, stroj C toplinski je stroj spojen na drugi i treći spremnik te njegov čitav izlazni rad napušta sustav tvoreći tako drugi doprinos ukupnom radu koji ovaj sustav vrši na okolinu.

Odredite kolika je ukupna izlazna snaga ovog sustava (s obzirom na rad koji ovaj sustav vrši na okolinu, dakle s obzirom na rad koji „napušta" sustav), ako je poznato da je ukupna izmjena topline u drugom spremniku jednaka nuli. Ako bismo sva tri stroja i „međuspremnik" 2 smatrali jednim strojem, odredite njegovu efikasnost. Bi li se takav stroj mogao smatrati Carnotovim strojem? Svakom od strojeva treba isto vrijeme, 2 sekunde, da odradi jedan ciklus.

**Rješenje:**

Napomena: u ovom zadatku tehnički je dan jedan podatak viška, tako da je zadatak posve rješiv čak i ako se nikada ne uzme u obzir temperatura $T_3$ ili podatak o toplini koju stroj B uzima iz trećeg spremnika. Ovaj je korak napravljen kako si se olakšala težina zadatka. Bodovanje uradaka učenika treba biti u skladu s naputkom iz zaglavka da se svaki fizikalno ispravan postupak pozitivno vrednuje.

Za svaki od Carnotovih strojeva vrijedi **(1 bod za poznavanje formule za izmjenu topline za Carnotov stroj)**

$$\frac{\Delta Q_i}{\Delta Q_j} = \frac{T_i}{T_j},$$

pri čemu su $\Delta Q_i$ i $\Delta Q_j$ izmijenjene topline sa spremnicima $i$ i $j$, a $T_i$ i $T_j$ temperature tih spremnika. Za Stroj A vrijedi $\Delta Q_1^A = 1.5$ kJ, pa je toplina predana drugom spremniku jednaka **(1 bod za točno određenu toplinu)**

$$\Delta Q_2^A = \Delta Q_1^A \frac{T_2}{T_1} = 0.75\,\mathrm{kJ}.$$

Prema zakonu očuvanja energije **(1 bod za poznavanje zakona očuvanja, bodove dodijeliti i ako se ovaj zakon iskoristio implicitno, primjerice u efikasnosti stroja)**, taj stroj onda mora u jednom ciklusu imati izlazni rad jednak **(1 bod za točno određen rad stroja A)**

$$\Delta W^A = \Delta Q_1^A - \Delta Q_2^A = 0.75\,\mathrm{kJ}.$$

Sada je lako izračunati koliku toplinu stroj B predaje drugom spremniku **(1 bod za poznavanje rada hladnjaka te 1 bod za točno određenu toplinu)**

$$\Delta Q_2^B = 0.5\Delta W^A + \Delta Q_3^B = (0.5 \cdot 0.75 + 1.5)\,\mathrm{kJ} = 1.875\,\mathrm{kJ}.$$

Prema uvjetu zadatka, toplinski stroj C uzima onoliko topline koliko strojevi A i B isporučuju drugom spremniku pa je **(1 bod za točno određenu toplinu)**

$$0 = \Delta Q_{2,\mathrm{uk}} = \Delta Q_2^A + \Delta Q_2^B - \Delta Q_2^C \quad \Rightarrow \quad \Delta Q_2^C = \Delta Q_2^A + \Delta Q_2^B = 2.625\ \mathrm{kJ}\,.$$

Toplinu koju toplinski stroj C predaje trećem spremniku možemo odrediti na isti način kao i za toplinski stroj A **(1 bod za točno određenu toplinu ili rad stroja C)**

$$\Delta Q_3^C = \Delta Q_2^C \frac{T_3}{T_2} = 2.1\ \mathrm{kJ}\,,$$

dok mu je rad

$$\Delta W^C = \Delta Q_2^C - \Delta Q_3^C = 0.525\ \mathrm{kJ}\,.$$

Ukupni je izlazni rad sustava je **(1 bod za točno određen rad)**

$$\Delta W_{\mathrm{uk}} = \Delta W^C + 0.5\,\Delta W^A = 0.9\ \mathrm{kJ}\,.$$

Uzimajući u obzir da ciklus strojeva traje 2 sekunde, snaga sustava je **(1 bod za točno određenu snagu)**

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = 0.45\ \mathrm{kW}\,.$$

Konačno, ako sva tri stroja i međuspremnik 2 smatramo jednim strojem, možemo zaključiti da je njegova efikasnost **(1 bod za točno određenu efikasnost)**,

$$\eta_{\mathrm{sustav}} = \frac{\Delta W_{\mathrm{uk}}}{\Delta Q_{\mathrm{uk,\ ulazno}}} = \frac{\Delta W_{\mathrm{uk}}}{\Delta Q_1^A} = 0.6\,,$$

pritom treba pripaziti da je ukupna izmjena topline s trećim spremnikom pozitivna, odnosno da novi stroj trećem spremniku predaje toplinu te stoga ta izmjena predstavlja energijski gubitak te se ne računa u uloženu energiju, to jest $\Delta Q_{\mathrm{uk,\ ulazno}}$.

Dok bi Carnotov stroj spojen na spremnike 1 i 3 imao efikasnost od

$$\eta_{\mathrm{Carnot}} = 1 - \frac{T_3}{T_1} = 0.6\,,$$

iz čega možemo zaključiti da ovaj sustav možemo smatrati Carnotovim strojem **(1 bod za dobro argumetiran zaključak)**.

**Zadatak 4.** (ukupno bodova: 12)

Jednu dvadesetinu volumena zatvorene i izolirane posude volumena 1 $m^3$ ispunjava krutina posebnog materijala, temperature 190 K, čiji je specifični toplinski kapacitet jednak za njezinu krutu i tekuću fazu te iznosi 1 kJ/kgK. Ostatak volumena ispunjen je sa 100 mola jednoatomnog idealnog plina temperature 500 K. Odredite tlak plina u konačnom stanju, odnosno kada je sva izmjena topline završena.

Specifikacije posebnog materijala su: specifična latentna toplina 150 kJ/kg, gustoća krute faze 60 kg/$m^3$, gustoća tekuće faze 20 kg/$m^3$, temperatura taljenja 200 K. Pretpostavite da su ove veličine konstante, da idealni plin ne može proći kroz fazni prijelaz te zanemari toplinsko širenje posude i tvari. Pri računu zanemarite utjecaj promjene gravitacijske potencijalne energije.

**Rješenje:**

S obzirom na to da su nam sve veličine zadane kao specifične, uputno je prvo odrediti masu krutine **(1 bod za točan rezultat za masu)**

$$m_k = 0.05V\rho_k = 3\,\mathrm{kg}\,,$$

pri čemu je $\rho_k$ gustoća krutine, a $V$ volumen posude. Tada je ukupni toplinski kapacitet tvari kada je ona sva u krutom stanju jednak **(1 bod za točan rezultat ili izraz za toplinski kapacitet)**

$$C_{\text{sve k}} = c_k m_k = 0.05 c_k V \rho_k = 3\,\mathrm{kJ/K}\,,$$

pri čemu je $c_k$ specifični toplinski kapacitet tvari. Energija potrebna da bi se krutina zagrijala do točke taljenja je **(1 bod za točan rezultat za energiju)**

$$\Delta Q_{\text{grijanje}} = (T_0 - T_t)C_{\text{sve k}} = 30\,\mathrm{kJ}\,,$$

pri čemu je $T_t$ temperatura taljenja tvari, a $T_0$ njezina početna temperatura. Temperatura koju plin ima u tom trenutku može se odrediti iz njegove unutarnje energije, promjena koje mora odgovarati energiji potrebnoj za zagrijavanje tvari **(1 bod za poznavanje formule unutarnje energije idealnog jednoatomnog plina)**

$$U_1 = U_0 - \Delta Q_{\text{grijanje}} = \frac{3}{2}nRT_{p,0} - \Delta Q_{\text{grijanje}} = \frac{3}{2}nRT_{p,1}\,,$$

pri čemu su $U_1$ i $U_0$ trenutna i početna unutarnja energija plina, a $T_{p,0}$ i $T_{p,1}$ trenutna i početna temperatura plina. Iz ovoga imamo da je $T_{p,1} = 475.944$ K, što znači da imamo dovoljno energije u sustavu za taljenje tvari **(1 bod za zaključak da se proces taljenja mora desiti)**

Pretpostavljajući da će u konačnom stanju sustava tvar biti samo djelomično rastaljena, možemo zaključiti da će u tom slučaju konačna temperatura plina biti jednaka temperaturi taljenja tvari $T_t$. Tada, će ukupna raspoloživa energija za taljenje biti **(1 bod za točan rezultat za raspoloživu energiju, bilo u varijabilnom, bilo u numeričkom obliku)**

$$\Delta E = \frac{3}{2}nRT_{p,0} - \frac{3}{2}nRT_t - \Delta Q_{\text{grijanje}}\,.$$

Ta je energija dostatna za otapanje $\Delta m$ mase tvari **(1 bod za poznavanje formule za latentnu toplinu)**

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{Q_L}\,,$$

pri čemu je $Q_L$ latentna toplina taljenja posebnog materijala. Iz ovoga slijedi da je masa tvari koja se rastopila **(1 bod za točan rezultat za rastaljenu masu, bilo u varijabilnom, bilo u numeričkom obliku)**

$$\Delta m = \frac{1}{Q_L}\left(\frac{3}{2}nR(T_{p,0} - T_t) - \Delta Q_{\text{grijanje}}\right) = 2.294\,\text{kg}\,.$$

Kako je dobivena masa manja od ukupne mase tvari zaključujemo da je naša početna pretpostavka bila točna **(1 bod za ovakav zaključak, odnosno za ispravno razmatranje konačnog stanja)**. Volumen koji plin zauzima je **(2 boda za točan rezultat za volumen plina, bilo u varijabilnom bilo u numeričkom obliku)**

$$V_{p,\text{kon}} = V - \frac{m_k - \Delta m}{\rho_k} - \frac{\Delta m}{\rho_k/3} = 0.95V - 2\frac{\Delta m}{\rho_k}\,.$$

Na kraju, tlak plina je **(1 bod za točan konačni rezultat)**

$$P_{p,\text{kon}} = \frac{nRT_t}{V_{p,\text{kon}}} = 190.353\,\text{kPa}\,.$$

**Zadatak 5.** (ukupno bodova: 7)

Vodoravna ekspanzijska komora parnog stroja na jednom je kraju zatvorena pomičnim klipom površine 5 $dm^2$ koji po njoj može kliziti bez trenja. U trenutku kada je razmak između klipa i zida komore 8 cm, dodatna se para počinje ubrizgavati u nju tako da para na klip djeluje stalnom silom od 50 kN. Klip se tada udaljava od drugog kraja komore te ukupno izvrši 20 kJ rada. Odredite koliko je molova pare ubrizgano u komoru.

Pretpostavite da je temperatura komore u početku jednaka 120 °C te da je do kraja procesa narasla za 20 °C, osim toga, pretpostavi da se para može opisati jednadžbom stanja idealnog plina. Zanemarite utjecaj vanjskog tlaka na klip i komoru.

**Rješenje:**

Ovo je promjena u kojoj jedino imamo konstantan tlak, dok se količina tvari, temperatura i volumen plina mijenjaju. Veličine koje opisuju početna i konačna stanja sustava izračunamo i/ili prevedemo u standardne SI jedinice uvjeti su **(po 1 bod - 3 boda ukupno - za svaku od ispravno izračunatih veličina, gdje se obje temperature računaju zajedno, bodove dodijeliti i u slučaju kada je to napravljeno implicitno)**:

$$T_{\text{poč}} = 393.15 \text{ K}; \quad T_{\text{kon}} = 413.15 \text{ K};$$

$$P_0 = F/S = 10^6 \text{ Pa};$$
$$V_{\text{poč}} = l \cdot S = 0.004 \text{ m}^3.$$

Rad koji je klip obavio daje nam informaciju o tome koliki je put prešao **(1 bod za točno izračunat put)**

$$\Delta s = W/F = 0.4 \text{ m}.$$

Sada nam je poznat i konačan volumen **(1 bod za točno izračunat volumen)**

$$V_{\text{kon}} = (l + \Delta s)S = 0.024 \text{ m}^3.$$

Konačno, koristeći se jednadžbom stanja plina, možemo dobiti množinu tvari ubrizgane pare **(1 bod za ispravnu manipulaciju jednadžbe stanja, 1 boda za točan rezultat za $\Delta n$)**

$$n = PV/RT$$

$$\Delta n = \frac{P_0}{R}\left(\frac{V_{\text{kon}}}{T_{\text{kon}}} - \frac{V_{\text{poč}}}{T_{\text{poč}}}\right) = 5.76 \text{ mol}$$

Fizikalne konstante:

ubrzanje sile teže blizu površine Zemlje:

$g = 9.81 \text{m/s}^2$

atmosferski tlak, odnosno tlak koji odgovara jednoj atmosferi:

$p_{\text{atm}} = 101300$ Pa

temperatura apsolutne nule:

$T_0 = -273.15$ °C

plinska konstanta:

$R = 8.314$ J/Kmol

# ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ FIZIKE

## 3. SKUPINA ZADATAKA

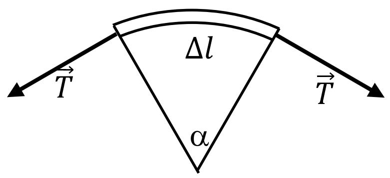
### ŠKOLSKA GODINA 2024./2025.

**Upute za bodovanje**: Ovdje je prikazan jedan način rješavanja zadataka. Ako učenici riješe zadatak na drugačiji, ali fizikalno pravilan način, treba im dati puni broj bodova predviđen za taj zadatak. Ako učenici ne napišu posebno svaki ovdje predviđeni korak, a vidljivo je da su ga napravili, treba im dati bodove kao da su ga napisali.

**Zadatak 1. (10 bodova)**

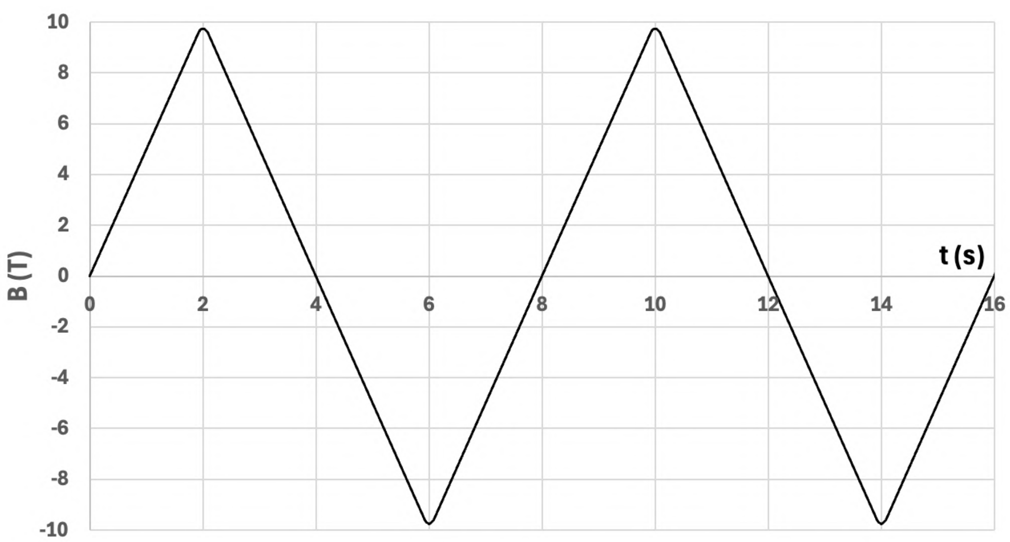
Električni generatori služe proizvodnji električne energije iz mehaničke, a sastoje se od zavojnice uronjene u promjenjivo magnetsko polje. Zavojnica (solenoid) pritom se napreže, zbog čega može doći do pucanja vodiča u njoj. Zavojnica je promjera 20 cm, a sastoji se od jednog sloja čvrsto namotanih bakrenih vodiča (žica) koji se međusobno dodiruju. Vodič zavojnice promjera je 1 mm, a električna otpornost bakra $1.68 \cdot 10^{-8}\ \Omega\mathrm{m}$. Sila napetosti pri kojoj neki materijal puca mjeri se tlačnim naprezanjem, odnosno silom napetosti po jedinici površine poprečnog presjeka pri kojoj će vodič puknuti, a koji za bakar iznosi 200 MPa. Magnetsko polje uvijek je usmjereno paralelno s osi zavojnice, a njegova promjena u vremenu prikazana je na slici dolje.

a) Odredite najveću struju u zavojnici koja bi potekla kada bismo krajeve zavojnice kratko spojili.
b) Odredite silu napetosti u bakrenom vodiču zavojnice pod a).
   Uputa: Do sile napetosti dolazi zbog djelovanja Lorentzove sile na vodič. Sila napetosti uvijek je paralelna s vodičem. Promotrite djelovanje Lorentzove sile na segment vodiča duljine luka *l* koji razapinje kut $\alpha$ kako biste odredili silu napetosti. Promatrajte napetost za male kutove i male duljine luka te uzmite u obzir da je $\sin\alpha \approx \alpha$ za male kutove $\alpha$




c) Odredite najveću silu napetosti u bakrenom vodiču pri kojoj će vodič puknuti. Hoće li pri navedenim uvjetima doći do pucanja vodiča u zavojnici?

Zanemarite sve rubne efekte. Funkcija koja opisuje ovisnost magnetskog polja o vremenu svugdje je glatka. Pretpostavite da se zavojnica nalazi u vakuumu.



**Rješenje**

Potrebno je uočiti da se u zavojnici s $N$ navoja inducira elektromotorni napon uslijed promjene magnetskog toka:

$$U = N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$ 1 bod

Magnetski se tok u vremenu $t$ mijenja kao (mijenja se samo iznos magnetskog polja):

$$\Phi(t) = B(t)\cdot A$$

Površine presjeka zavojnice kroz koju se mijenja magnetski tok:

$$A = \left(\frac{D}{2}\right)^2 \pi = 0.0314\ \mathrm{m}^2$$

Iz grafičkog prikaza $B(t)$ vidljivo je da će najveća promjena magnetskog polja u vremenu biti svugdje osim na vrhovima krivulje. Učenik može uzeti bilo koji vremenski interval u tom dijelu krivulje i odrediti promjenu magnetskog polja $\Delta B$ u vremenskom intervalu $\Delta t$. Vidljivo je da će maksimalna promjena biti:

$$\frac{\Delta \mathrm{B}}{\Delta \mathrm{t}} = 5\ \mathrm{T/s}$$ 1 bod

Odnosno:

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta \mathrm{t}} = \frac{\Delta \mathrm{B}}{\Delta \mathrm{t}}\cdot A = \frac{\Delta \mathrm{B}}{\Delta \mathrm{t}}\cdot\left(\frac{D}{2}\right)^2 \pi = 0.157\ \mathrm{Wb}$$

Najviši inducirani električni napon na krajevima zavojnice iznosi:

$$U = N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = N\frac{\Delta \mathrm{B}}{\Delta \mathrm{t}}\cdot\left(\frac{D}{2}\right)^2 \pi$$

Induciranu struju odredimo iz Ohmova zakona poznavajući otpor bakrene žice površine poprečnog presjeka $S = \left(\frac{d}{2}\right)^2 \pi = 7.85\cdot 10^{-7}\ \mathrm{m}^2$ i dužine $L$:

$$R = \rho\frac{L}{S}$$

Dužina žice u zavojnici jest umnožak opsega jednog zavoja i broja zavoja $N$:

$$L = 2\frac{D}{2}\pi\cdot N = D\pi N$$ 1 bod

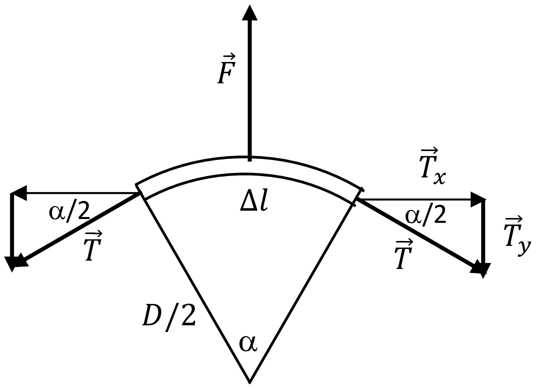
$$I = \frac{U}{R} = \frac{US}{\rho L}$$

$$I = \frac{N}{L}\cdot\frac{S}{\rho}\cdot\frac{\Delta \mathrm{B}}{\Delta \mathrm{t}}\cdot\left(\frac{D}{2}\right)^2 \pi = \frac{N}{D\pi N}\cdot\frac{(dD\pi)^2}{16\rho}\cdot\frac{\Delta \mathrm{B}}{\Delta \mathrm{t}}$$

$$I = \frac{d^2\pi D}{16\rho}\cdot\frac{\Delta \mathrm{B}}{\Delta \mathrm{t}} = 11.69\ \mathrm{A}$$ 1 bod

Iz grafa je vidljivo da je maksimalno magnetsko polje u zavojnici $B_{max} = 10\ \mathrm{T}$ što odgovara i maksimalno induciranoj struji $I$.

**NAPOMENA**: Priznati i ako učenik za maksimalnu magnetsko polje pri najvećoj vremenskoj promjeni magnetskog polja uzme i nešto niži iznos, između 9.5 i 10 T.




Magnetsko polje djeluje na segment žice duljine $\Delta l$ Lorentzovom silom $F$ (magnetsko polje okomito je na smjer struje, a Lorentzova sila okomita je na vodič):

$$F = BI\Delta l$$ 1 bod

Na gornjoj slici vidljiva je veza između sile napetosti žice i Lorentzove sile:

$$F = 2T_y$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{T_y}{T} = \frac{F}{2T}$$ 1 bod

Možemo izabrati proizvoljno mali segment luka žice $\Delta l$ pa dobijemo ($\sin\alpha/2 \approx \alpha/2$):

$$T = \frac{F}{2\sin\alpha/2} \approx \frac{F}{2\,\alpha/2} = \frac{B_{max}I\Delta l}{\alpha}$$ 1 bod

Primijetimo da je kružni isječak:

$$\Delta l = \frac{D}{2}\alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta l}{\alpha} = \frac{D}{2}$$ 1 bod

Konačno je sila napetosti žice:

$$T = \frac{B_{max}ID}{2} = 11.69\ \mathrm{N}$$ 1 bod

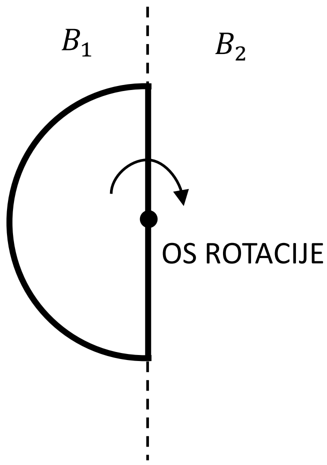
Maksimalna sila napetosti pri kojoj dolazi do pucanja žice iznosi:

$$T_{max} = \sigma S = \sigma\left(\frac{d}{2}\right)^2 \pi = 157.08\ \mathrm{N}$$ 1 bod

S obzirom na to da je $T < T_{max}$, žica neće puknuti.

**Zadatak 2. (10 bodova)**
Polukružna vodljiva petlja okreće se oko osi koja je okomita na površinu petlje tako da opisuje kružnicu polumjera *r*. Petlja rotira konstantnom brzinom s periodom *P*. Petlja se nalazi u konstantnom magnetskom polju $B_1$ okomitom na površinu petlje (lijeva strana) te rotacijom ulazi u magnetsko polje $B_2$ istog smjera, ali tri puta manje jakosti u odnosu na $B_1$ (vidi sliku).

a) Odredite izraz za inducirani elektromotorni napon u petlji u ovisnosti o vremenu, magnetskom polju $B_1$, polumjeru *r* i periodu *P*.
b) Nacrtajte graf ovisnosti induciranog elektromotornog napona o vremenu u intervalu od početka rotacije petlje do povratka u početni položaj (petlja je rotirala puni krug) ako je petlja radijusa 50 cm i rotira s periodom 0.5 s. Magnetsko polje iznosi $B_1 = 2\ \mathrm{T}$.




**Rješenje**
U petlji se inducira elektromotorni napon kako se mijenja magnetski tok okretanjem polukružne petlje:

$$U = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

Lijevi i desni prostor s magnetskim poljima $\vec{B}_1$ i $\vec{B}_2$ možemo promatrati odvojeno. Na početku gibanja u lijevom prostoru s magnetskim boljem $B_1$ dolazi do smanjenja toka magnetskog polja $\Delta\Phi_1$ u nekom vremenu $\Delta t$ jer se smanjuje poprečni presjek petlje $\Delta S_1$ u magnetskom polju $B_1$:

$$\Delta\Phi_1 = -B_1 \cdot \Delta S_1$$ 1 bod

Rotacijom petlje i ulaskom u područje magnetskog polja $B_2$ dolazi do povećanja toka magnetskog toka $\Delta\Phi_2$ u istom vremenu $\Delta t$ uslijed povećanja poprečnog presjeka petlje $\Delta S_2$ u magnetskom polju $B_2 = \frac{1}{3}B_1$:

$$\Delta\Phi_2 = B_2 \cdot \Delta S_2 = \frac{1}{3}B_1 \cdot \Delta S_2$$ 1 bod

Primijetimo da su promjene površine petlje u prostoru magnetskog polja $B_1$ i $B_2$ jednake:

$$\Delta S_1 = \Delta S_2 = \Delta S$$

Konačno, ukupna promjena toka magnetskog polja u vremenu $\Delta t$ iznosi:

$$\Delta\Phi = \Delta\Phi_1 + \Delta\Phi_2 = -B_1 \cdot \Delta S_1 + \frac{1}{3} B_1 \cdot \Delta S_2 = -\frac{2}{3} B_1 \cdot \Delta S$$ 1 bod

Potrebno je još izračunati promjenu površine $\Delta S$ petlje koja izlazi iz područja magnetskog polja $B_1$ i ulazi u područje magnetskog polja $B_2$ u nekom vremenu $\Delta t$, opisujući pritom kut $\Delta\varphi$ i luk $\Delta l = r\Delta\varphi$:

$$\Delta S = \frac{\Delta l}{2r\pi} \cdot r^2\pi = r\Delta\varphi \cdot \frac{r}{2} = \frac{r^2\Delta\varphi}{2}$$ 1 bod

Promjena površine $\Delta S$ u vremenu $\Delta t$ iznosi:

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{r^2}{2} \cdot \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

U vremenu jednog perioda $\Delta t = P$ rotacije petlja se vrati u početni položaj, odnosno napravi puni krug $\Delta\varphi = 2\pi$, pa je

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{P}$$

Konačno:

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{r^2}{2} \cdot \frac{2\pi}{P} = \frac{r^2\pi}{P}$$ 1 bod

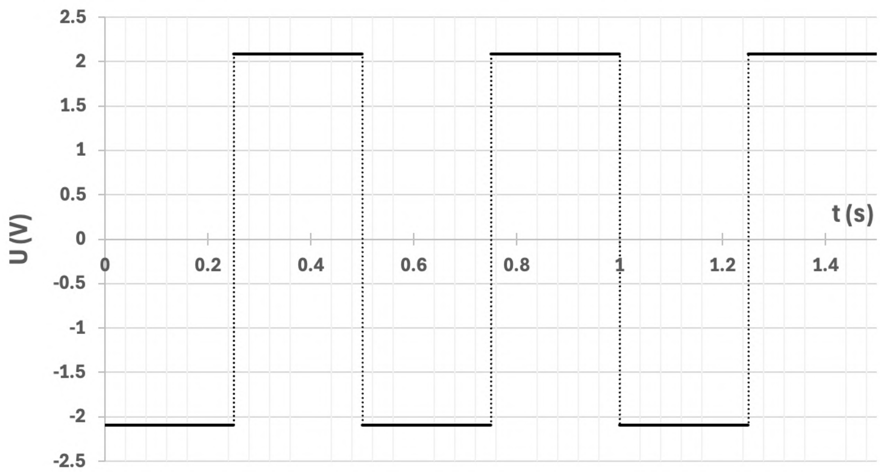
Inducirani elektromagnetni napon iznosi:

$$U = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{2}{3} B_1 \cdot \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{2B_1 r^2\pi}{3P}$$ 1 bod

U prvoj poluperiodi magnetski tok rotacijom opada jer se polupetlja rotira iz područja većeg u područje manje okomite komponente magnetskog polja. U drugoj će poluperiodi magnetski tok rasti. Potrebno je uočiti da su inducirani elektromotorni naponi u objema poluperiodama po iznosu jednaki, ali suprotnog predznaka:

$$U = -\frac{2B_1 r^2\pi}{3P} = -2.09\ \mathrm{V} \ \text{ za } 0 < t < \frac{P}{2}$$
$$U = \frac{2B_1 r^2\pi}{3P} = 2.09\ \mathrm{V} \ \text{ za } \frac{P}{2} < t < P$$ 1 bod

Grafički prikaz ovisnosti induciranog elektromotornog napona o vremenu:



| | |
|---|---|
| Ispravno ucrtana vremena promjene induciranog elektromotornog napona | 1 bod |
| Ispravno ucrtan oblik induciranog elektromotornog napona (konstantne vrijednosti) | 1 bod |
| Ispravno ucrtani iznosi i predznaci induciranog elektromotornog napona | 1 bod |

**NAPOMENA:** Rezultat za inducirani elektromotorni napon (numerički rezultat i grafički prikaz) potrebno je uvažiti bez obzira na predznak, no nužno je da učenik primijeti da inducirani elektromotorni napon mijenja predznak svakih pola periode.

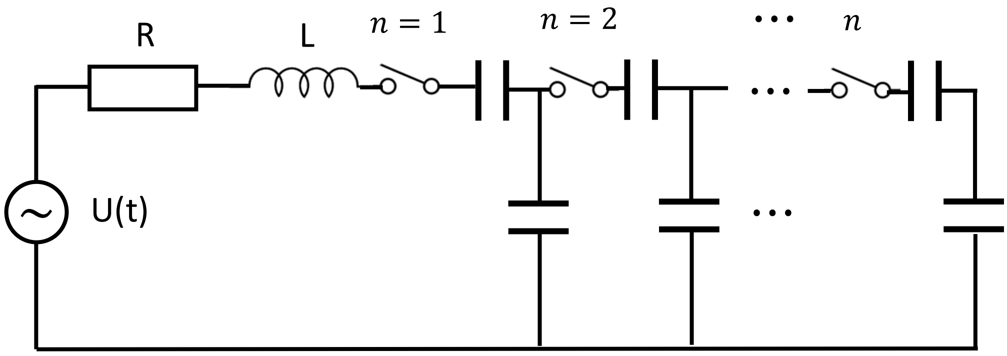
**Zadatak 3. (10 bodova)**

Serijski krug RLC spojen je na izvor izmjeničnog napona U(t) kako je prikazano na donjoj slici. Svi su kondenzatori istog kapaciteta koji iznosi 50 μF. Omski otpor iznosi 60 Ω, dok je induktivitet zavojnice 330 mH.

a) U kapacitivnom dijelu kruga spojeni su kondenzatori u nizu s *n* sklopki kako je prikazano na slici. Usporedite ukupni kapacitet kapacitivnog dijela kruga u slučajevima kada prvo zatvorimo sklopku $n = 1$, zatim i sklopku $n = 2$, pa $n = 3$ i na kraju sklopku $n = 4$. U kojim je slučajevima međusobna razlika kapaciteta manja od 1 %?

b) Za $n = 3$ zatvorenih sklopki odredite impedanciju cijelog sklopa RLC ako je sklop spojen na izvor izmjeničnog napona frekvencije 100 Hz.

c) Za $n = 3$ zatvorenih sklopki odredite rezonantnu frekvenciju sklopa.



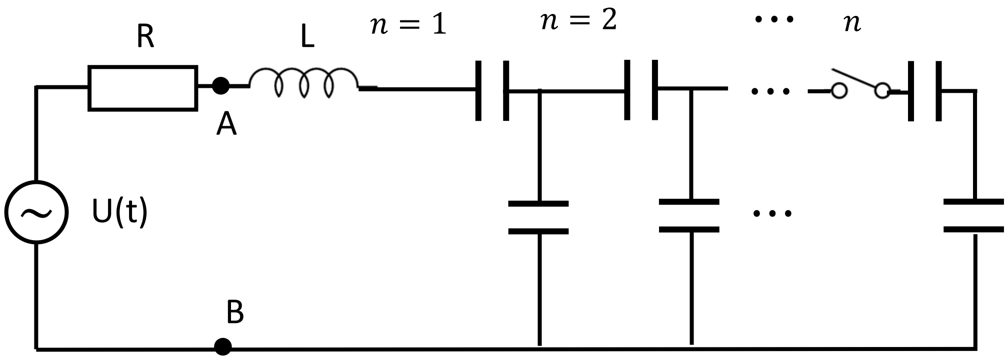
**Rješenje**

Elektronička shema predstavlja serijski spojeni krug RLC. Kako je vidljivo, kada se zatvori prva sklopka ($n = 1$), u krug se priključuju dva serijski spojena kondenzatora. Njihov je ekvivalentni kapacitet:

$$\frac{1}{C_1} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C} = \frac{2}{C}$$

$$C_1 = \frac{C}{2} = 0.5\ C$$ 1 bod

Kada se uključi druga sklopka, sklop izgleda ovako:




Desna dva kondenzatora spojena su serijski pa im je ekvivalentni kapacitet jednak $C_1$. Oni su pak spojeni paralelno s kondenzatorom $C$, pa serijski s drugim kondenzatorom $C$. Ekvivalentni je otpor sada:

$$\frac{1}{C_2} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C_1 + C} = \frac{1}{C} + \frac{1}{\frac{C}{2} + C} = \frac{1}{C} + \frac{2}{3C} = \frac{5}{3C}$$ 1 bod

$$C_2 = \frac{3}{5}C = 0.6C$$ 1 bod

Sada možemo nastaviti niz zatvaranja sklopki i uključivanja po dva serijski spojena kondenzatora u ostatak kruga. Za $n = 3$ zatvorenu sklopku imamo ekvivalentni kapacitet:

$$\frac{1}{C_3} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C_2 + C} = \frac{1}{C} + \frac{5}{8C} = \frac{13}{8C}$$

$$C_3 = \frac{8}{13}C = 0.615C$$ 1 bod

Za proizvoljan broj zatvorenih sklopki $n$ imamo rekurzivnu jednadžbu:

$$\frac{1}{C_n} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C_{n-1} + C}$$

Vidimo da su kapaciteti $C_3$ i $C_2$ već bliski, pa odredimo još i za $n = 4$:

$$\frac{1}{C_4} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C_3 + C} = \frac{1}{C} + \frac{13}{21C} = \frac{34}{21C}$$

$$C_4 = \frac{21}{34}C = 0.6176C$$ 1 bod

Vidimo da je odstupanje:

$$\frac{C_4 - C_3}{C_3} \cdot 100 = 0.37\%$$ 1 bod

Možemo stoga zaključiti da je ekvivalentni kapacitet s $n > 3$ zatvoreniih sklopki jednak ekvivalentnom kapacitetu s $n = 3$ zatvorenih sklopki do na 1 %. Dalje ćemo računati s ekvivalentnim kapacitetom za $n = 3$ zatvorenih sklopki:

$$C_3 = \frac{8}{13} C = 0.615 C = 30.77\ \mu\mathrm{F}$$ 1 bod

Impedancija sklopa iznosi:

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C_3}\right)^2} = |Z| = \sqrt{R^2 + \left(2\pi f L - \frac{1}{2\pi f C_3}\right)^2} = 166.79\ \Omega$$ 2 boda

Do rezonancije dolazi kada je impedancija najmanja, odnosno za frekvencije napona izvora kada ukupna impedancija postaje $|Z| = R$:

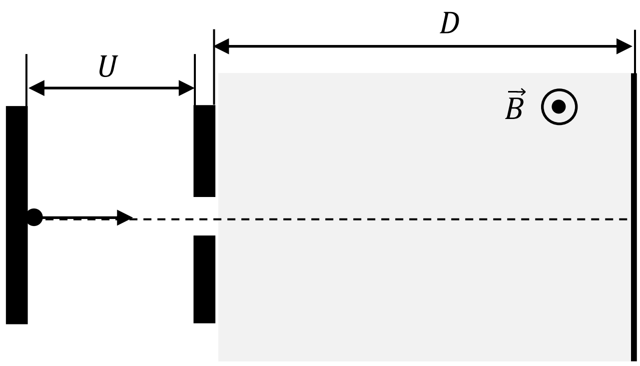
$$\omega L - \frac{1}{\omega C_3} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{L C_3}}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L C_3}} = 49.95\ \mathrm{Hz}\ \approx 50\ \mathrm{Hz}$$ 1 bod

**Zadatak 4. (10 bodova)**

Maseni spektrometar jest uređaj koji s pomoću magnetskog polja može razdvojiti čestice u ovisnosti o omjeru njihove mase i naboja. Nabijena se čestica prvo ubrzava iz stanja mirovanja u homogenom električnom polju s razlikom potencijala $U = 1000\ \mathrm{V}$, nakon čega uleti u prostor u kojemu djeluje magnetsko polje. Magnetsko polje okomito je na upadni smjer brzine čestice, te izlazi iz površine papira. Takvo magnetsko polje uzrokuje otklon nabijene čestice. Magnetsko polje naizmjence se pali i gasi, i to tako da se upali u trenutku ulaska čestice u magnetsko polje. Upaljeno magnetsko polje uvijek je istog iznosa $B = 1\ \mathrm{mT}$ i smjera. Polje je upaljeno $t_0 = 1\ \mu\mathrm{s}$, jednako dugo koliko je ugašeno. Česticu možemo detektirati kada udari u fluorescentni zastor postavljen okomito na smjer upadne čestice na udaljenosti $D = 1.5\ \mathrm{m}$. Odredite mjesto udara protona u zastor u odnosu na mjesto udara kada bi magnetsko polje bilo u potpunosti isključeno.

**UPUTE:** Prvo izračunajte položaj protona kada je po prvi put upaljeno magnetsko polje. Ako proton nije udario u zaslon u trenutku kada se polje ugasilo, izračunajte položaj protona u intervalu s ugašenim poljem i provjerite je li dosegnuo zaslon. Ako nije, izračunajte položaj protona u intervalu s ponovno upaljenim poljem, provjerite je li udarilo u zaslon itd., sve dok proton ne dosegne zaslon.



**Rješenje**

Proton se ubrzava u električnom polju s razlikom potencijala *U* te na izlazu iz električnog polja ima brzinu *v*. Čestica naboja *q* dobiva kinetičku energiju:

$$E_K = qU$$

S obzirom na to da je kinetička energija čestice mase *m*:

$$E_K = \frac{mv^2}{2}$$

dobijemo za brzinu protona mase $m = 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg na izlazu iz električnog polja, odnosno na ulazu u magnetsko polje:

$$v = \sqrt{\frac{2qU}{m}} = 4.377 \cdot 10^5 \text{ m/s}$$ 1 bod

Početni smjer brzine protona okomit je na magnetsko polje i na fluorescentni zaslon te će Lorentzova sila djelovati u ravnini papira i okomito na smjer brzine. Čestica će se stoga gibati po kružnici polumjera *R* dok god je uključeno magnetsko polje.

Lorentzova sila $q \cdot v \cdot B$ djeluje kao centripetalna sila $\frac{mv^2}{R}$, a čestica izvodi kružno gibanje:

$$\frac{mv^2}{R} = qvB$$

$$R = \frac{mv}{qB} = \frac{m}{qB}\sqrt{\frac{2qU}{m}} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU}{q}} = 4.57 \text{ m}$$ 1 bod

Pri uključenom magnetskom polju u vremenu $t_0 = 1$ µs čestica kruži brzinom *v* po kružnici i prelazi put *l* koji je ujedno i luk kružnice razapet kutom $\alpha$:

$$v = \frac{l}{t_0} \quad \Longrightarrow \quad l = vt_0$$

$$l = \alpha R \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \frac{vt_0}{R} = 0.0958 \text{ rad}$$ 1 bod

Nakon što je čestica prešla luk *l* po kružnici, gasi se magnetsko polje i čestica nastavlja jednoliko gibanje duž pravca brzinom *v* (vidi sliku).

Postavimo li koordinatni sustav tako da se ishodište nalazi na mjestu ulaska čestice u magnetsko polje, možemo odrediti položaj čestice *x* i *y*:

$$x = R\sin\alpha = 0.437 \text{ m}$$

$$y = R\cos\alpha - R = R(\cos\alpha - 1) = -0.02095 \text{ m}$$ 1 bod

Kako bismo odredili daljnje ponašanje čestice koja se giba jednoliko duž pravca, treba odrediti i komponente brzine:

$$v_x = v\cos\alpha$$

$$v_y = v\sin\alpha$$

Gibajući se ovim brzinama, čestica je prešla put $\Delta x$ i $\Delta y$ za vrijeme dok je magnetsko polje ugašeno:

$$\Delta x = v_x \cdot t_0 = vt_0\cos\alpha$$

$$\Delta y = -v_y \cdot t_0 = -vt_0\sin\alpha$$ 1 bod

Položaj čestica nakon ukupno $2t_0$ vremena kada se magnetsko polje opet pali:

$$x' = x + \Delta x = R\sin\alpha + vt_0\cos\alpha = 0.8728 \text{ m}$$

$$y' = y + \Delta y = R(\cos\alpha - 1) - vt_0\sin\alpha = -0.0628 \text{ m}$$ 1 bod

Nakon ponovnog paljenja magnetskog polja, čestica se nastavlja gibati po kružnici te, nakon što je magnetsko polje bilo upaljeno $t_0$ vremena (trenutak $t = 3t_0$), položaj čestice bit će:

$$x'' = R\sin 2\alpha + vt_0\cos\alpha = 1.3058\ \mathrm{m}$$
$$y'' = R(\cos 2\alpha - 1) - vt_0\sin\alpha = -0.1255\ \mathrm{m}$$ 1 bod

Primijetite da je gibanje ekvivalentno gibanju po kružnici za kut $2\alpha$ dok je magnetsko polje upaljeno zbrojeno s pravocrtnim gibanjem dok je magnetsko polje ugašeno.

Potrebno je analogno izračunati komponente brzina za pravocrtni dio gibanja nakon što je čestica prešla luk $2l$ razapet kutom $2\alpha$:

$$v_x'' = v\cos 2\alpha$$
$$v_y'' = v\sin 2\alpha$$

Dijelovi puta dok je magnetsko polje ugašeno:

$$\Delta x'' = v_x''\cdot t_0 = vt_0\cos 2\alpha$$
$$\Delta y'' = -v_y''\cdot t_0 = -vt_0\sin 2\alpha$$ 1 bod

Položaj čestica nakon ukupno $4t_0$ vremena, kada se magnetsko polje opet pali:

$$x''' = x'' + \Delta x'' = R\sin 2\alpha + vt_0\cos\alpha + vt_0\cos 2\alpha = 1.7355\ \mathrm{m}$$
$$y''' = y'' + \Delta y'' = R(\cos 2\alpha - 1) - vt_0\sin\alpha - vt_0\sin 2\alpha = -0.20885\ \mathrm{m}$$ 1 bod

Dalje nije potrebno računati jer vidimo da je čestica pogodila zaslon:

$$x''' > D$$

Potrebno je još izračunati točan položaj $y = y_T$ u kojemu je čestica pogodila zaslon za $x = D$. To je moguće učiniti na više načina:

1. Koristeći razmjere s obzirom na to da se u posljednjem dijelu čestica giba pravocrtno:

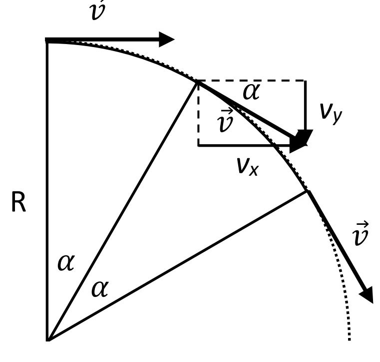
$$\frac{x''' - x''}{y''' - y''} = \frac{D - x''}{y_T - y''}$$
$$y_T = y'' + \frac{D - x''}{x''' - x''}(y''' - y'') = -0.1631\ \mathrm{m}$$ 1 bod

2. Koristeći se brzinama tako da se odredi vrijeme udara $t_T$ čestice u zaslon, a iz toga mjesto udara:

$$\Delta x_T = v_x\cdot t_T = vt_T\cos 2\alpha$$
$$\Delta x_T = D - x'' = 0.1942\ \mathrm{m}$$
$$t_T = \frac{\Delta x_T}{v\cos 2\alpha} = 0.451\ \mathrm{\mu s}$$

Konačno:

$$y_T = y'' - vt_T\sin 2\alpha = -0.1631\ \mathrm{m}$$ 1 bod



**Zadatak 5. (10 bodova)**
Hidrometar je jednostavan uređaj za mjerenje gustoće tekućina. Sastoji se od uske cilindrične cijevi polumjera $r = 4\ \mathrm{mm}$ potpuno ispunjene tekućinom mase $m = 10\ \mathrm{g}$. U ravnotežnom stanju cijev je uronjena u tekućinu i miruje u uspravnom položaju. Dužina cilindrične cijevi od $l = 30\ \mathrm{cm}$ dovoljno je velika da se jedan dio uvijek nalazi ispod, a drugi dio iznad površine tekućine. Ako malo pomaknemo cijev vertikalno prema dolje, njezin će položaj početi oscilirati. Ako ste izmjerili period oscilacija $T = 0.9\ \mathrm{s}$, odredite gustoću tekućine. Zanemarite viskoznost tekućine.

**Rješenje**
Napomena: Iako konačan rezultat ne ovisi o zadanoj duljini cijevi $l = 30\ \mathrm{cm}$, ona je zadana dovoljno velika kako bi se osiguralo da se jedan dio uvijek nalazi ispod, a drugi dio iznad površine tekućine.
Na cijev uronjenu u tekućinu djeluju dvije sile:

1. sila teže koja je usmjerena uvijek vertikalno prema dolje:
$$G = mg$$ 1 bod
2. sila uzgona koja je usmjerena uvijek vertikalno prema gore:
$$F_u = \rho g V_u$$ 1 bod
Gdje je $V_u$ uronjeni volumen tijela u tekućinu

Ako je hidrometar uronjen do visine *h*, tada je uronjeni volumen:
$$V_u = r^2 \pi h$$
U ravnotežnom stanju, hidrometar je uronjen do visine $h_0$:
$$V_{u0} = r^2 \pi h_0$$ 1 bod
Kada hidrometar miruje, sila teža uravnotežena je silom uzgona:
$$G = F_{u0}$$ 1 bod
$$mg = \rho g r^2 \pi h_0$$
Potopimo li hidrometar za dužinu $\Delta h$, sila uzgona poveća se zbog čega postoji rezultantna sila koja pomiče hidrometar prema gore (minus označava da je smjer sile uzgona suprotan od smjera pomaka):
$$F_u = (-)\rho g r^2 \pi (h_0 + \Delta h) > F_{u0} = G$$
Pomaknemo li hidrometar prema površini za dužinu $\Delta h$, sila uzgona smanji se zbog čega postoji rezultantna sila koja pomiče hidrometar prema dolje:
$$F_u = (-)\rho g r^2 \pi (h_0 - \Delta h) < F_{u0} = G$$ 1 bod
Zadatak možemo riješiti analogijom s oprugom i elastičnom silom, gdje na isti način na tijelo obješeno o oprugu djeluje sila teža i elastična sila $F_{el}$:
$$F_{el} = -k(x_0 + \Delta \mathrm{x})$$ 1 bod
gdje je elastična sila uvijek u suprotnom smjeru od pomaka, baš kao i kod sile uzgona.
Analogijom između sile uzgona i elastične sile možemo identificirati $k \equiv \rho g r^2 \pi$

Period elastične opruge iznosi:
$$T_{el} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$ 1 bod

Period hidrometra bit će:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho g r^2 \pi}} = \sqrt{\frac{4\pi m}{\rho g r^2}}$$ 2 boda

Gustoća tekućine iznosi:

$$\rho = \frac{4\pi m}{T^2 g r^2} = 988.41\ \mathrm{kg/m^3}$$ 1 bod

**NAPOMENA**: Učenik može riješiti zadatak i s pomoću jednadžbe gibanja koju identificira s jednadžbom harmonijskog oscilatora. Ovaj postupak treba jednako priznati

$$F_R = G - F_u$$ 1 bod

$$am = mg - \rho g r^2 \pi (h_0 + \Delta h)$$ 1 bod

$$am = mg - \rho g r^2 \pi h_0 - \rho g r^2 \pi \Delta h$$ 1 bod

Iz ravnotežnog uvjeta $mg = \rho g r^2 \pi h_0$: 1 bod

$$am = mg - mg - \rho g r^2 \pi \Delta h = -\rho g r^2 \pi \Delta h$$ 1 bod

$$a = -\frac{\rho g r^2 \pi}{m} \Delta h = -\omega^2 \Delta h$$ 2 bod

što je jednadžba harmonijskog oscilatora s rješenjem:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho g r^2 \pi}}$$ 2 bod

$$\rho = \frac{4\pi m}{T^2 g r^2} = 988.41\ \mathrm{kg/m^3}$$ 1 bod

# Županijsko natjecanje iz fizike, šk. god. 2024./2025.
# Srednja škola, 4. skupina

(20. 3. 2025.)

**ZADATCI**

VAŽNO: Tijekom ispita učenici ne smiju imati nikakav pisani materijal (knjige, bilježnice, formule...). Za pisanje treba se koristiti kemijskom olovkom ili nalivperom. Učenici pri ruci ne smiju imati mobitel ni druge elektroničke uređaje osim kalkulatora.

1. (9 bodova) Osvjetljavanjem površine nekog metala svjetlošću valne duljine $0.35\,\mu\mathrm{m}$, a zatim svjetlošću valne duljine $0.54\,\mu\mathrm{m}$, uočeno je da se odgovarajuće maksimalne brzine fotoelektrona razlikuju za faktor dva. a) Nađite izlazni rad ovog metala. b) Na koji će se maksimalni električni potencijal nabiti kuglica načinjena od ovog metala, udaljena od svih drugih naboja, kad je obasjamo elektromagnetskim zračenjem valne duljine $140\,\mathrm{nm}$? U oba dijela zadatka računajte nerelativistički.

2. (12 bodova) Ravna staklena ploča reflektivnosti 0.8 leži na ravnoj horizontalnoj podlozi bez trenja. Kratak svjetlosni puls energije $10\,\mathrm{J}$ u obliku uske i kolimirane zrake upada na ploču pod kutom od $30°$ u odnosu na okomicu na njezinu površinu. Promatrajte ovaj puls kao roj fotona, tj. kuglica koje se lijepe za ploču, odnosno odbijaju od nje. a) Nađite iznos ukupne količine gibanja koju ploči predaju reflektirani i apsorbirani fotoni. Pretpostavite da će se svi fotoni koji nisu reflektirani apsorbirati. b) Neka ovaj puls traje $0.13\,\mathrm{ms}$. Koliki tlak okomito na površinu izvrši ako obasjava dio ove staklene ploče površine $100\,\mu\mathrm{m}^2$?

3. (7 bodova) Spektar zračenja Sunca može se prilično dobro aproksimirati onime crnog tijela čiji je maksimum zračenja na valnoj duljini od $480\,\mathrm{nm}$. a) Koliku masu Sunce izgubi svake sekunde uslijed zračenja? b) U kojem vremenu izgubi $1\,\%$ onoga što tipično uzimamo za masu Sunca, naime $M_\odot = 1.99 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$? Sunce promatrajte kao kuglu radijusa $R_\odot = 6.96 \times 10^{8}\,\mathrm{m}$.

4. (11 bodova) Idealan polarizator stavljen je na put djelomično polarizirane svjetlosti. a) Ako se polarizator zarotira za $60°$ u odnosu na orijentaciju koja rezultira maksimalnom transmisijom, intenzitet transmitirane svjetlosti smanji se na trećinu maksimalne vrijednosti. Nađite stupanj polariziranosti upadne svjetlosti. Pod stupnjem polariziranosti misli se na udio intenziteta polarizirane svjetlosti u ukupnom intenzitetu. b) Neka je polarizator iz prvog dijela zadatka zarotiran za $60°$ u odnosu na maksimum transmisije. Iza njega dodan je još jedan idealan polarizator, zarotiran za kut od $30°$ u odnosu na prvi polarizator. Koliki dio upadnog intenziteta svjetlosti iz prvog dijela zadatka prolazi kroz sustav ovih dvaju polarizatora?

5. (11 bodova) Koristeći se zakonima očuvanja energije i količine gibanja, pokažite da slobodni elektron ne može u potpunosti apsorbirati (jedan) foton. **Naputak:** Pretpostavite suprotno te sudar/apsorpciju promatrajte relativistički!

Neke konstante:

$$h = 6.63 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s} \quad \text{(Planckova konstanta)}$$
$$\sigma = 5.67 \times 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}} \quad \text{(Stefan-Boltzmannova konstanta)}$$
$$b = 2.9 \times 10^{-3}\,\mathrm{m \cdot K} \quad \text{(Wienova konstanta)}$$
$$c = 3 \times 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}} \quad \text{(brzina svjetlosti u vakuumu)}$$
$$m_e = 9.11 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg} \quad \text{(masa elektrona)}$$
$$e = 1.6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C} \quad \text{(elementarni naboj)}$$

# Školsko natjecanje iz fizike, šk. god. 2024./2025.
## Srednja škola, 4. skupina
(20. 3. 2025.)

### RJEŠENJA I SMJERNICE ZA BODOVANJE

Ovdje je prikazan jedan način rješavanja zadataka. Ako učenici zadatak riješe na drugačiji, a fizikalno pravilan način, treba im dati puni broj bodova predviđen za taj zadatak. Ako učenici ne napišu posebno svaki ovdje predviđeni korak, a vidljivo je da su ga napravili, treba im dati bodove kao da su ga napisali.

1. a) Riječ je o fotoelektričnom efektu, pa svjetlost promatramo kao skup fotona i primjenjujemo Einsteinov izraz. On vrijedi za obje valne duljine ($\lambda_1 = 0.35\,\mu\text{m}$, $\lambda_2 = 0.54\,\mu\text{m}$) te možemo skupno pisati (**1 bod**)

$$\frac{hc}{\lambda_{1,2}} = \frac{m_e v_{1,2}^2}{2} + W_0\,, \tag{1}$$

pri čemu je $W_0$ traženi izlazni rad. Izlazni rad jest svojstvo materijala pa je isti u oba slučaja. Prema tome, brzine izlazećih elektrona jesu one koje ovise o valnoj duljini upadnog zračenja (što je izričito navedeno i u tekstu zadatka).

Iz gornjih izraza možemo izraziti brzine elektrona (**1 bod**):

$$v_{1,2} = \sqrt{\frac{2}{m_e}\left(\frac{hc}{\lambda_{1,2} - W_0}\right)}\,. \tag{2}$$

U zadatku nam je dan njihov omjer, $\eta \equiv v_1/v_2 = 2$, za koji imamo (**1 bod**)

$$\eta = \sqrt{\frac{\frac{hc}{\lambda_1} - W_0}{\frac{hc}{\lambda_2} - W_0}}\,. \tag{3}$$

Znamo da je omjer brzina ispravno definiran ($\eta = v_1/v_2$, a ne inverz toga) jer je iz Einsteinova izraza jasno da manja valna duljina rezultira većom brzinom, a $\lambda_1 < \lambda_2$.

Gornji izraz kvadriramo i sređujemo (**2 boda** za konačni izraz):

$$\eta^2 = \frac{\frac{hc}{\lambda_1} - W_0}{\frac{hc}{\lambda_2} - W_0} \tag{4}$$

$$\left(\frac{hc}{\lambda_2} - W_0\right)\eta^2 = \frac{hc}{\lambda_1} - W_0 \tag{5}$$

$$hc\left(\frac{\eta^2}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\right) = (\eta^2 - 1)W_0 \tag{6}$$

$$W_0 = \frac{hc}{\eta^2 - 1}\left(\frac{\eta^2}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\right)\,. \tag{7}$$

Uvrštavanjem podataka u posljednji izraz dobivamo (**1 bod**)

$$W_0 \approx 3.02 \times 10^{-19}\,\text{J} \approx 1.88\,\text{eV}\,. \tag{8}$$

b) Suštinski ponovno primjenjujemo izraz (1),

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{m_e v^2}{2} + W_0\,, \tag{9}$$

gdje je izlazni rad $W_0$ onaj upravo nađen, a valna duljina $\lambda = 140\,\text{nm}$. Vidimo da je ova valna duljina dovoljna za izazivanje fotoelektričnog efekta, te maksimalnu brzinu izlaznih elektrona nalazimo kao i u prvom dijelu zadatka (**1 bod**),

$$\frac{m_e v^2}{2} = \frac{hc}{\lambda} - W_0\,. \tag{10}$$

Izbijanjem elektrona uslijed fotoelektričnog efekta kuglica se pozitivno nabija te preostali elektroni moraju svladavati i njezino kulonsko privlačenje. Kad se elektrostatska energija izjednači s maksimalnom kinetičkom energijom elektrona, daljnji elektroni više neće bivati izbijeni. Elektrostatska energija elektrona $E_p$ povezana je s traženim maksimalnim potencijalom kuglice $\Phi$ preko

$$E_p = e\Phi \tag{11}$$

pa imamo (**1 bod**)

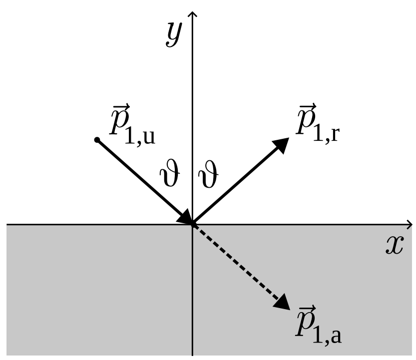
$$e\Phi = \frac{m_e v^2}{2}\,. \tag{12}$$

Izražavanjem kinetičke energije iz jednadžbe (10) i dijeljenjem s nabojem elektrona slijedi

$$\Phi = \frac{hc}{\lambda\, e} - \frac{W_0}{e} \approx 6.99\,\mathrm{V} \tag{13}$$

(**1 bod** za točno uvrštavanje).

2. a) Donja skica prikazuje prijenos količine gibanja jednog fotona pri refleksiji ili apsorpciji. Pritom je $\theta = 30^\circ$ zadani upadni kut, a reflektirani kut jednak upadnome.




Ključno je primijetiti da reflektirane fotone moramo promatrati zasebno od apsorbiranih, budući da fotoni iz te dvije skupine, prema zakonu očuvanja količine gibanja, ploči predaju različite iznose količine gibanja (**1 bod**). Udio upadnih fotona koji će se reflektirati je $R$ (**1 bod**), a prema uvjetima zadatka svi preostali bit će apsorbirani te je njihov udio $(1-R)$ (**1 bod**). Ako s $\vec{p}$ označimo ukupnu količinu gibanja svih fotona u snopu, količina gibanja predana ploči, $\Delta\vec{p}$, dana je s

$$\Delta\vec{p} = R\,(-2\,p\,\cos\theta\,\vec{j}) + (1-R)\,(p\,\sin\theta\,\vec{i} - p\,\cos\theta\,\vec{j})\,, \tag{14}$$

gdje je $p = |\vec{p}|$, $R = 0.8$ reflektivnost ploče, a $\vec{i}$ i $\vec{j}$ jedinični vektori u $x$-smjeru, odnosno $y$-smjeru (**1 bod** + **1 bod** za ispravne vrijednosti količine gibanja predane u ova dva smjera). **Pojašnjenje:** Reflektirani fotoni zadržavaju čitavu količinu gibanja paralelnu s površinom ploče, dok okomita komponenta nakon refleksije ima isti iznos kao pri upadu (budući da je reflektirani kut jednak upadnom kutu), ali je suprotne orijentacije (tj. ovi fotoni ploči predaju dvostruku količinu gibanja u smjeru okomitom na površinu). Apsorbirani fotoni ploči predaju čitavu paralelnu i okomitu komponentu.
Kako bismo izračunali iznos ukupne predane količine gibanja, potrebno je grupirati $x$ i $y$-komponente (**1 bod**):

$$\Delta\vec{p} = p\,[(1-R)\,\sin\theta\,\vec{i} - (1+R)\,\cos\theta\,\vec{j}]\,. \tag{15}$$

Ukupni predznak komponente u danom smjeru nije važan jer ne utječe na konačni iznos. Za fotone vrijedi $p = E/c$ (**1 bod**), što je potrebno iskoristiti jer je u zadatku zadana energija snopa, $E = 10\,\mathrm{J}$. Traženi iznos ukupne količine gibanja ploče konačno je jednak (**1 bod**)

$$\Delta p \equiv |\Delta\vec{p}| = \frac{E}{c}\,\sqrt{(1-R)^2\sin^2\theta + (1+R)^2\cos^2\theta}\,. \tag{16}$$

Uvrštavanjem imamo (**1 bod**)

$$\Delta p \approx 5.21\times 10^{-8}\,\mathrm{kg\,m\,s^{-1}} \tag{17}$$

b) Za tlak je potrebno promatrati samo okomitu komponentu količine gibanja predane ploči, koja je prema razradi u prvom dijelu zadatka jednaka (**1 bod**)

$$|\Delta\vec{p}|_{\perp} = (1+R)\,\frac{E}{c}\cos\theta\,. \tag{18}$$

Tlak je jednak okomitoj sili po jedinici površine, dok je sila jednaka promjeni količine gibanja u vremenu pa imamo (**1 bod**)

$$p_{\text{tlak}} = \frac{|\Delta\vec{p}|_{\perp}}{\tau\,A}\,, \tag{19}$$

gdje je $\tau = 0.13\,\text{ms}$, a $A = 100\,\mu\text{m}^2$ upadna površina. Uvrštavanjem slijedi (**1 bod**)

$$p_{\text{tlak}} \approx 4\times10^{6}\,\text{Pa} \approx 39.5\,\text{atm}\,. \tag{20}$$

3. a) Ako Sunce promatramo kao crno tijelo čiji je maksimum spektralne gustoće zračenja na valnoj duljini $\lambda_0 = 480\,\text{nm}$, njegova je temperatura dana Wienovim zakonom (**1 bod**),

$$T = \frac{b}{\lambda_0}\,. \tag{21}$$

Stefan-Boltzmannov zakon tada daje ukupnu gustoću zračenja (**1 bod**)

$$M = \sigma T^4\,. \tag{22}$$

Izračena snaga jednaka je umnošku gornje gustoće zračenja i oplošja Sunca (**1 bod**),

$$P = M\cdot 4\,R_{\odot}^2\,\pi\,. \tag{23}$$

Snaga je pak jednaka promjeni energije u vremenu, a energija je proporcionalna masi (ekvivalencija mase i energije, $\Delta E = \Delta m\,c^2$) pa imamo (**1 bod**)

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{P}{c^2}\,. \tag{24}$$

Ubacivanjem izraza (21)–(23) u gornji slijedi

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{4\,\pi\,\sigma\,b^4\,R_{\odot}^2}{c^2\,\lambda_0^4} \tag{25}$$

pa uvrštavanjem dobivamo (**1 bod**)

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} \approx 5.12\times10^{9}\,\text{kg}\,\text{s}^{-1}\,. \tag{26}$$

b) Prema uvjetima zadatka, izračena masa jednaka je

$$\Delta m_0 = \eta M_{\odot}\,, \tag{27}$$

uz $\eta = 1\,\%$. Traženo vrijeme $t_0$ jednako je (**1 bod**) omjeru ove mase i vremenske promjene mase u vremenu, izračunate u prvom dijelu zadatka,

$$\Delta t_0 = \frac{\Delta m_0}{\frac{\Delta m}{\Delta t}} = \frac{\eta M_{\odot}}{\frac{\Delta m}{\Delta t}}\,. \tag{28}$$

Uvrštavanjem imamo (**1 bod**)

$$\Delta t_0 = 3.89\times10^{18}\,\text{s} \approx 1.23\times10^{11}\,\text{god}\,. \tag{29}$$

4. a) Rečeno je da je svjetlost djelomično polarizirana pa ukupni intenzitet koji upada na polarizator možemo zapisati kao zbroj redom nepolariziranog i polariziranog dijela intenziteta (**1 bod**),

$$I_0 = I_1 + I_2\,. \tag{30}$$

U slučaju maksimalne transmisije, os polarizatora poravnata je sa smjerom polarizacije polariziranog dijela pa je odgovarajući intenzitet čitav transmitiran (**1 bod**). S druge strane, u prosjeku se transmitira polovica nepolariziranog intenziteta (**1 bod**). Dakle, imamo

$$I_{T,\mathrm{max}} = \frac{1}{2}I_1 + I_2\,. \tag{31}$$

U slučaju da se os polarizatora zakrene za $\varphi = 60^\circ$ u odnosu na orijentaciju koja odgovara maksimumu intenziteta, promjenit će se jedino transmisija polariziranog intenziteta, tako da je (**1 bod**)

$$I_{T,\varphi} = \frac{1}{2}I_1 + \cos^2\varphi\, I_2\,. \tag{32}$$

Prema uvjetima zadatka ukupni transmitirani intenziteti u ova dva slučaja razlikuju se za faktor $\eta = 3$, odnosno (**1 bod**)

$$\eta(\frac{1}{2}I_1 + \cos^2\varphi I_2) = \frac{1}{2}I_1 + I_2\,. \tag{33}$$

Budući da se traži udio polarizirane svjetlosti, izražavamo $I_1$ preko $I_2$ (**1 bod** za donja dva koraka zajedno):

$$\frac{I_1}{2}(\eta - 1) = I_2(1 - \eta\cos^2\varphi) \tag{34}$$

$$I_1 = \frac{2(1-\eta\cos^2\varphi)}{\eta - 1}I_2\,. \tag{35}$$

Stupanj polarizacije $\mathcal{P}$ jednak je omjeru polariziranog intenziteta i ukupnog intenziteta,

$$\mathcal{P} = \frac{I_2}{I_1 + I_2}\,. \tag{36}$$

Supstitucijom za $I_1$ i uvrštavanjem imamo (**1 bod**)

$$\mathcal{P} = 0.8\,. \tag{37}$$

b) Prvi polarizator zarotiran je za kut $\varphi = 60^\circ$ u odnosu na maksimum transmisije, tj. orijentiran je kao u drugom slučaju iz prvog dijela zadatka. Intenzitet koji transmitira dan je, kao i ranije, s

$$I_{T,1} = I_{T,\varphi} = \frac{1}{2}I_1 + \cos^2\varphi\, I_2\,. \tag{38}$$

Nakon prvog polarizatora svjetlost je linearno polarizirana u smjeru osi prvog polarizatora. Drugi polarizator zarotiran je za $\theta = 30^\circ$ u odnosu na prvi pa će on transmitirati (**2 boda**)

$$I_{T,2} = I_{T,\varphi}\cos^2\theta = \left(\frac{1}{2}I_1 + \cos^2\varphi\, I_2\right)\cos^2\theta\,. \tag{39}$$

Budući da je upadna svjetlost jednaka onoj iz prvog dijela zadatka, vrijedi jednadžba (35), tj. $I_1 = I_2/4$ (ili, drugačije, $I_1 = (\mathcal{P}^{-1} - 1)\, I_2$) pa je traženi udio jednak (**1 bod**)

$$\frac{I_{T,2}}{I_0} = \frac{\left(\frac{1}{8} + \cos^2\varphi\right)\,\cos^2\theta}{\frac{5}{4}}\,. \tag{40}$$

Uvrštavanjem slijedi (**1 bod**)

$$\frac{I_{T,2}}{I_0} = 0.225\,. \tag{41}$$

5. Sudar ćemo, bez smanjenja općenitosti, promotriti u referentnom sustavu elektrona prije sudara. Koristimo se relativističkim izrazima za kinetičku energiju i količinu gibanja te uzimamo u obzir energiju mirovanja elektrona.

Zakon očuvanja energije kaže (**3 boda**, po 1 bod za svaku energiju):

$$h\nu + m_e c^2 = \frac{m_e\, c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\,, \tag{42}$$

gdje je $\nu$ frekvencija fotona, a $\beta = v/c$ uz $v$ brzinu elektrona nakon sudara.

Zakon količine gibanja glasi (**1 bod** + **1 bod**):

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{m_e\, c\, \beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\,. \tag{43}$$

**Napomena:** Nije potrebno da se energija fotona specificira kao $h\nu$, može biti zapisana jednostavno kao izvjesna konačna energija $E$, ali mora biti prisutna u zakonu očuvanja energije za jedan bod i povezana s odgovarajućom količinom gibanja kroz $p = E/c$ za drugi.

Rješavanje ovog sustava jednadžbi, bilo u ovisnosti o $\beta$ bilo o $v$, ukupno nosi **4 boda**. Ti su bodovi u nastavku razrađeni za jedan način rješavanja. Eliminiramo energiju fotona koristeći se posljednjim izrazom,

$$E = h\nu = \frac{m_e\, c^2\, \beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\,, \tag{44}$$

te ovo ubacujemo u zakon očuvanja energije (1 bod za dobivanje sljedećeg izraza)

$$\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,. \tag{45}$$

Sređujemo (po 1 bod za svaka dva od sljedeća četiri koraka, ukupno 2 boda):

$$\beta + \sqrt{1-\beta^2} = 1 \tag{46}$$

$$1-\beta^2 = (1-\beta)^2 \tag{47}$$

$$1-\beta^2 = 1 - 2\beta + \beta^2 \tag{48}$$

$$\beta(\beta-1) = 0\,. \tag{49}$$

Rješenja su $\beta = 1$ i $\beta = 0$ (zajedno 1 bod, ujedno zadnji od gore spomenuta 4 boda). Prvo rješenje zabranjuje specijalna teorija relativnosti (**1 bod**). Drugo rješenje prema jednadžbi (44) odgovara energiji fotona $E = 0$. Ovo bi značilo da nema upadnog fotona, a pretpostavili smo da ga ima, što znači da smo problem doveli do apsurda (**1 bod**).