Školsko natjecanje iz fizike 2024./2025.
Srednje škole – 1. skupina

VAŽNO: Tijekom ispita učenici se ne smiju koristiti nikakvim pisanim materijalom (knjigama, bilježnicama, formulama...). Za pisanje treba se koristiti kemijskom olovkom ili nalivperom. Učenici pri ruci ne smiju imati mobitel ni druge elektroničke uređaje osim kalkulatora.

1. zadatak (10 bodova)

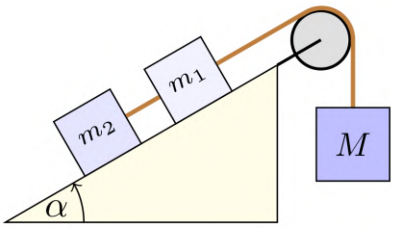
Vlak, gibajući se jednoliko pravocrtno, za 2 minute prijeđe $3.6\ \mathrm{km}$ nakon čega pola minute jednoliko usporava te se zaustavi na stanici gdje jednu minutu čeka iskrcaj i ukrcaj putnika. Potom jednoliko ubrzavajući $20\ \mathrm{s}$ prelazi $200\ \mathrm{m}$ pruge nakon čega se 2 minute nastavlja gibati jednoliko postignutom brzinom. Nacrtajte graf ovisnosti brzine vlaka u vremenu te izračunajte prosječnu brzinu vlaka.

2. zadatak (10 bodova)

Ivan i Marija utrkuju se na pravocrtnoj stazi dugoj $200\ \mathrm{m}$ te kreću iz mirovanja. Ivan ubrzava jednoliko $5.5\ s$, a Marija $4.4\ s$ do svojih maksimalnih brzina kojima pretrče ostatak staze te istovremeno prelaze ciljnu liniju $33.0\ \mathrm{s}$ nakon početka utrke. Koliko iznose njihove akceleracije i maksimalne brzine?

3. zadatak (10 bodova)

Promotrite 3 bloka povezana kao na slici nerastezljivim užetom zanemarive mase, prebačenim preko koloture zanemarive mase. Statički faktor trenja između blokova mase $m_2 = 3m_1 = 3\ \mathrm{kg}$ i kosine iznosi $\mu_s = 1/\sqrt{3}$. Kosina s tlom zatvara kut $\alpha = 30°$. Nacrtajte sve sile koje djeluju na blokove te odredite maksimalnu vrijednost mase bloka M pri kojoj bi sustav ostao u ravnoteži.



4. zadatak (10 bodova)

Skijaš u početnom trenutku kreće iz stanja mirovanja i spušta se na skijama tijekom $6\ \mathrm{s}$ stalnim ubrzanjem niz ravnu dugu skakaonicu prekrivenu snijegom koja s tlom zatvara kut od 30°. Od prve do treće sekunde prijeđe put od $19.55\ \mathrm{m}$. Uzmite u obzir silu trenja između skija i snijega, a zanemarite otpor zraka. Ubrzanje slobodnoga pada iznosi $9.81\ \mathrm{m/s^2}$. Nacrtajte dijagram sila na skijaša. Odredite koliku udaljenost prijeđe skijaš nakon 6 s te koeficijent trenja između skija i snijega.

5. zadatak (10 bodova)

S koje bi visine trebalo ispustiti kuglicu da udari o tlo pet puta većom brzinom nego kad je ispustimo s visine od 4905 mm? Kako se odnose i koliko iznose vremena pada iz oba slučaja? Zanemarite otpor zraka. Ubrzanje slobodnoga pada iznosi $9.81\ \mathrm{m/s^2}$.

Školsko natjecanje iz fizike 2024./2025.
Srednje škole – 1. skupina

Rješenja i smjernice za bodovanje

U smjernicama je naveden samo jedan mogući način rješavanja, a treba priznati i bilo koji drugi ispravan postupak. Boduju se i drugi zapisi ako su u skladu s odabranim referentnim sustavom i napisanim jednadžbama u mjernim jedinicama po slobodnom izboru. Ako su preskočene trivijalne linije koje se boduju, a jednadžbe u nastavku su dobre, priznaju se bodovi kao da je sve napisano. Ne boduju se formule u kojima je upisan kriv iznos neke fizičke veličine. Dodjeljuju se samo cjelobrojni bodovi.

1. zadatak (10 bodova)

Do $t_1 = 120$ s vlak prelazi put $\Delta x_1 = 3.6\ \mathrm{km} = 3600\ \mathrm{m}$ gibajući se jednoliko brzinom

[1 bod] $v_1 = \Delta x_1 / t_1 = 30\ \mathrm{m/s}$.

Od t_1 do $t_2 = 150$ s jednoliko usporavajući do $v_2 = 0\ \mathrm{m/s}$, vlak prelazi put

[1 bod] $\Delta x_2 = v_1(t_2 - t_1)/2 = 450\ \mathrm{m}$.

[1 bod] Od t_2 do $t_3 = 210$ s vlak miruje pa je $\Delta x_3 = 0\ \mathrm{m}$, $v_3 = v_2 = 0\ \mathrm{m/s}$.

Od t_3 do $t_4 = 230$ s vlak jednoliko ubrzavajući prelazi $\Delta x_4 = 200\ \mathrm{m}$ i postiže brzinu

[1 bod] $v_4 = (2\Delta x_4)/(t_4 - t_3\ ) = 20\ \mathrm{m/s}$.

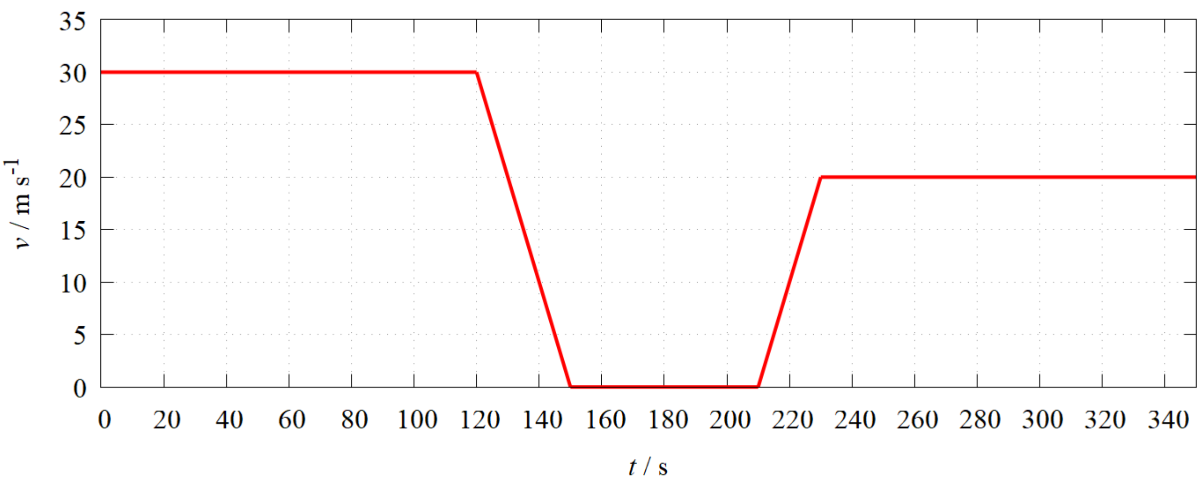
Od t_4 do $t_5 = 350$ s gibajući se jednoliko brzinom $v_5 = 20\ \mathrm{m/s}$, vlak prelazi put

[1 bod] $\Delta x_5 = v_5(t_5 - t_4) = (20\ \mathrm{m/s}) \cdot (120\ \mathrm{s}) = 2400\ \mathrm{m}$.

[1 bod] Prosječna brzina vlaka iznosi $\bar{v} = (\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \Delta x_4 + \Delta x_5)/t_5$

[1 bod] $\bar{v} = (6650\ \mathrm{m})/(350\ \mathrm{s}) = 19\ \mathrm{m/s}$.

Na sljedećem grafu prikazana je



[1 bod] ovisnost brzine vlaka u vremenu od 0 do 150 s i

[1 bod] ovisnost brzine vlaka u vremenu od 150 do 350 s te

[1 bod] te su istaknute oznake prikazanih veličina u odabranim mjernim jedinicama.

2. zadatak (10 bodova)

Ivan i Marija pretrče istu udaljenost $x = 200\ \mathrm{m}$ za isto vrijeme $t = 33.0\ s$ tako da jednoliko ubrzavaju akceleracijama redom a_I i a_M tijekom početnih vremenskih intervala Δt_I i Δt_M prelazeći put $x_{\mathrm{I}1}$ i $x_{\mathrm{M}1}$ dok preostalo vrijeme $t - \Delta t_\mathrm{I}$ i $t - \Delta t_\mathrm{M}$ trče jednoliko maksimalnim brzinama redom

[1 bod] $v_\mathrm{I} = a_\mathrm{I}\Delta t_\mathrm{I}$ (1)

[1 bod] $v_\mathrm{M} = a_\mathrm{M}\Delta t_\mathrm{M}$ (2)

prelazeći preostali dio puta $x_{\mathrm{I}2}$ i $x_{\mathrm{M}2}$ pa ukupne prijeđene puteve možemo zapisati kao

[1 bod] $x = x_{\mathrm{I}1} + x_{\mathrm{I}2}$

[1 bod] $x = x_{M1} + x_{\mathrm{M}2}$

[1 bod] $x = 0.5 \cdot a_\mathrm{I} \cdot \Delta t_\mathrm{I}^2 + v_\mathrm{I} \cdot (t - \Delta t_\mathrm{I}) = 0.5 \cdot a_\mathrm{I} \cdot \Delta t_\mathrm{I}^2 + a_\mathrm{I} \cdot \Delta t_\mathrm{I} \cdot (t - \Delta t_\mathrm{I})$

[1 bod] $x = 0.5 \cdot a_\mathrm{M} \cdot \Delta t_\mathrm{M}^2 + v_\mathrm{M} \cdot (t - \Delta t_\mathrm{M}) = 0.5 \cdot a_\mathrm{M} \cdot \Delta t_\mathrm{M}^2 + a_\mathrm{M} \cdot \Delta t_\mathrm{M} \cdot (t - \Delta t_\mathrm{M})$

iz čega možemo izračunati akceleracije (boduju se rezultati točni do na barem 2 decimale)

[1 bod] $a_\mathrm{I} = x/\left[0.5 \cdot \Delta t_\mathrm{I}^2 + \Delta t_\mathrm{I} \cdot (t - \Delta t_\mathrm{I})\right] \approx 1.202\ \mathrm{m/s^2}$

[1 bod] $a_\mathrm{M} = x/\left[0.5 \cdot \Delta t_\mathrm{M}^2 + \Delta t_\mathrm{M} \cdot (t - \Delta t_\mathrm{M})\right] \approx 1.476\ \mathrm{m/s^2}$

pa iz (1) i (2) slijede maksimalne brzine (boduju se rezultati točni do na barem 2 decimale)

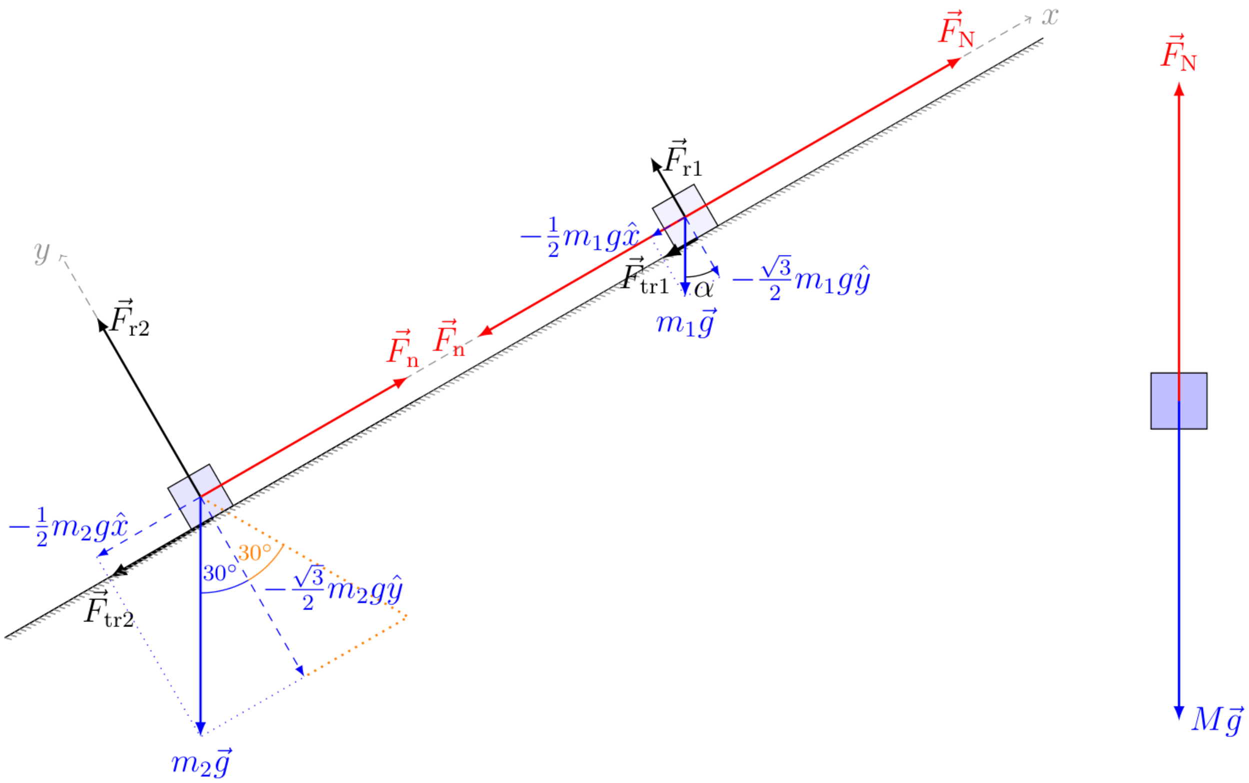
[1 bod] $v_\mathrm{I} = x/(t - 0.5\Delta t_\mathrm{I}) \approx 6.612\ \mathrm{m/s}$

[1 bod] $v_\mathrm{M} = x/(t - 0.5\Delta t_\mathrm{M}) \approx 6.494\ \mathrm{m/s}.$

3. zadatak (10 bodova)

Promatramo granični slučaj maksimalne mase M pa analiziramo povlačenje užeta prema M što znači da su sile trenja orijentirane niz kosinu nagiba $\alpha = 30°$. Na sljedećoj slici prikazani su dijagrami sila na blokove (boduju se za pojedino tijelo ako su pravilno orijentirane sila trenja, gravitacijska sila ili njezina komponenta u smjeru užeta, napetost niti; prikazane strelicama čije duljine ne moraju biti sumjerljive iznosima sila). Dakle,

[1 bod] sile na m_2, **[1 bod]** sile na m_1, **[1 bod]** sile na M.



Komponente gravitacijske sile mogu se izraziti iz jednakostraničnog/pravokutnog trokuta: duž kosine kao $m_{1,2}g/2$ ili $m_{1,2}g\sin 30°$, a okomita na kosinu kao $m_{1,2}g\sqrt{3}/2$ ili $m_{1,2}g\cos 30°$. Priznaju se svi bodovi u nizu ako su preskočene očite linije i napisana gotova jednadžba, npr. odmah uračunato $a = 0$ ili sile napetosti i reakcije podloge izražene napamet zbog ravnoteže. Primjenom II. Newtonova zakona na svako tijelo dobivamo sustav jednadžbi:

[1 bod] $Mg - F_{\mathrm{N}} = Ma,$ (1)

[1 bod] $F_{\mathrm{N}} - F_{\mathrm{n}} - F_{\mathrm{tr1}} - m_1 g/2 = m_1 a$ ili $F_{\mathrm{N}} - F_{\mathrm{n}} - F_{\mathrm{tr1}} - m_1 g\sin\alpha = m_1 a,$ (2)

[1 bod] $F_{\mathrm{n}} - F_{\mathrm{tr2}} - m_2 g/2 = m_2 a$ ili $F_{\mathrm{n}} - F_{\mathrm{tr2}} - m_2 g\sin\alpha = m_2 a$ ili … (3)

[1 bod] Sustav je u ravnoteži pa su reakcije podloge $F_{\mathrm{r}1,2}$ istog iznosa kao komponente gravitacijske sile okomite na kosinu $F_{\mathrm{r}1,2} = m_{1,2}g\sqrt{3}/2$ ili $F_{\mathrm{r}1,2} = m_{1,2}g\cos\alpha$.

[1 bod] Tada sile trenja iznose $F_{\mathrm{tr}1,2} = \mu_{\mathrm{s}}F_{\mathrm{r}1,2} = \mu_{\mathrm{s}}m_{1,2}g\sqrt{3}/2$ ili $F_{\mathrm{tr}1,2} = \mu_{\mathrm{s}}m_{1,2}g\cos\alpha$. (4)

[1 bod] Zanima nas ravnotežno stanje ($a = 0$) pa uvrštavanjem (4) u (1), (2), (3) dobivamo:

$$F_{\mathrm{N}} = Mg, \tag{5}$$

$$F_{\mathrm{N}} = F_{\mathrm{n}} + \mu_{\mathrm{s}}m_1 g\sqrt{3}/2 + m_1 g/2, \tag{6}$$

$$F_{\mathrm{n}} = \mu_{\mathrm{s}}m_2 g\sqrt{3}/2 + m_2 g/2. \tag{7}$$

Uvrštavanjem (5) i (7) u (6), uz zadani odnos $m_2 = 3m_1$, dobivamo iznos maksimalne mase

$$M = \mu_{\mathrm{s}}m_1\sqrt{3}/2 + m_1/2 + \mu_{\mathrm{s}}m_2\sqrt{3}/2 + m_2/2 = 4m_1\left(\mu_{\mathrm{s}}\sqrt{3}/2 + 1/2\right)$$

[1 bod] $M = 4\cdot 1\,\mathrm{kg}\cdot(1/\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}/2 + 1/2) = 4\,\mathrm{kg}.$

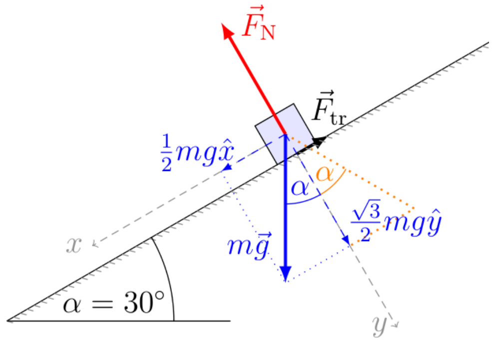
4. zadatak (10 bodova)

Modeliramo skijaša kao tijelo mase m koje kreće iz mirovanja $v_0 = 0\ \mathrm{m/s}$ iz početnog položaja $x_0 = 0\ \mathrm{m}$ te na koje djeluju sile prikazane na sljedećoj slici (boduju se pravilne orijentacije sila reprezentirane strelicama, dok duljine strelica ne moraju biti sumjerljive iznosima sila):

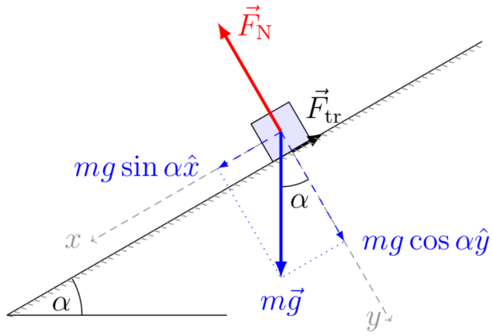
[1 bod] sila trenja $\vec{F}_{\mathrm{tr}}$ (uz kosinu),

[1 bod] reakcija podloge $\vec{F}_{\mathrm{N}}$ (okomito na kosinu),

[1 bod] gravitacijska sila $m\vec{g}$ (prema tlu)
koju rastavljamo na komponentu okomitu i paralelnu kosini (niz kosinu).



ili



Tijekom prve sekunde, $\Delta t_1 = 1\ \mathrm{s}$, tijelo jednoliko ubrzavajući postiže brzinu

[1 bod] $v_1 = v_0 + a\Delta t_1 = a\Delta t_1$ (1)

koja je početna za gibanje od 1. do 3. sekunde tijekom $\Delta t_{3,1} = 3\ \mathrm{s} - 1\ \mathrm{s} = 2\ \mathrm{s}$ (napomena: ako se drugačije interpretira $\Delta t_{3,1}$, tj. početak/kraj 1. ili 3. sekunde, a postupak rješavanja je ispravan, treba priznati bodove u nastavku) kada tijelo prelazi udaljenost $x_3 - x_1 = 19.55\ \mathrm{m}$,

[1 bod] $x_3 - x_1 = \mathrm{v}_1 \cdot \Delta t_{3,1} + 0.5 \cdot a \cdot \left(\Delta t_{3,1}\right)^2 = a \cdot \Delta t_1 \cdot \Delta t_{3,1} + 0.5 \cdot a \cdot \left(\Delta t_{3,1}\right)^2$

iz čega slijedi ubrzanje

[1 bod] $a = (x_3 - x_1)/\left[\Delta t_1 \cdot \Delta t_{3,1} + 0.5 \cdot \left(\Delta t_{3,1}\right)^2\right] \approx 4.888\ \mathrm{m/s^2}$.

Tijelo gibajući se jednoliko ubrzano tijekom prvih $t_6 = 6\ \mathrm{s}$ prijeđe

[1 bod] $x_6 = x_0 + v_0 \cdot t_6 + 0.5 \cdot a \cdot t_6^2 = 0.5 \cdot a \cdot t_6^2 \approx 87.98\ \mathrm{m}$.

Tijelo ostaje na kosini pa su istog iznosa sila reakcije podloge i komponenta gravitacijske sile okomita na kosinu, koju možemo izraziti preko visine jednakostraničnoga trokuta prikazanoga na gornjoj lijevoj slici $F_{\mathrm{N}} = mg\sqrt{3}/2$ ili koristeći se definicijom trigonometrijske funkcije $\cos\alpha$ na pravokutnome trokutu na desnoj slici (priležeća kateta / hipotenuza mg) $F_{\mathrm{N}} = mg\cos\alpha$. Slično, komponentu gravitacijske sile niz kosinu možemo izraziti kao polovicu stranice izdvojenoga jednakostraničnoga trokuta $mg/2$, odnosno kao $mg\sin\alpha$. Tada sila trenja iznosi

[1 bod] $F_{\mathrm{tr}} = \mu F_{\mathrm{N}} = \mu mg\sqrt{3}/2$.

Ukupna sila jednaka zbroju sila u smjeru gibanja, odnosno prema II. Newtonovu zakonu imamo

[1 bod] $ma = mg/2 - \mu mg\sqrt{3}/2$

iz čega možemo izračunati koeficijent trenja

[1 bod] $\mu = (g/2 - a)/\left(g\sqrt{3}/2\right) \approx 0.002$.

5. zadatak (10 bodova)

[1 bod] U prvom slučaju kuglicu ispuštamo s visine $h_1 = 4905\ \mathrm{mm} = 4.905\ \mathrm{m}$
dok u drugom slučaju kuglicu želimo ispustiti s visine h_2 tako da udari o tlo pet puta većom brzinom v_2 nego u prvom slučaju,

[1 bod] $v_2 = 5v_1.$ (1)

Kuglica slobodno pada pa kvadrati brzina pri udaru o tlo iznose

[1 bod] $v_1^2 = 2gh_1$ i

[1 bod] $v_2^2 = 2gh_2$

[1 bod] što uvrštavanjem u kvadriranu jednadžbu (1) daje

[1 bod] $2gh_2 = 25(2gh_1)$

iz koje nakon dijeljenja s $(2g)$ slijedi da kuglicu treba ispustiti s visine

[1 bod] $h_2 = 25\ h_1 = 122.625\ \mathrm{m}.$

Vremena slobodnog pada iznose:

[1 bod] $t_1 = \sqrt{2h_1/g} = 1\ \mathrm{s},$

[1 bod] $t_2 = \sqrt{2h_2/g} = 5\ \mathrm{s}.$

te se odnose kao $t_2/t_1 = \sqrt{h_2/h_1}$, tj.

[1 bod] $t_2 = 5t_1$ (boduje se samo egzaktan rezultat).

ŠKOLSKO NATJECANJE IZ FIZIKE – 17. veljače 2025.

Srednje škole – 2. skupina

Rješenja i smjernice za bodovanje

Upute za bodovanje: Ovdje je prikazan jedan način rješavanja zadataka. Ako učenici riješe zadatak na drugačiji, a fizikalno pravilan način, treba im dati puni broj bodova predviđen za taj zadatak. Ako učenici ne napišu posebno svaki ovdje predviđeni korak, a vidljivo je da su ga napravili, treba im dati bodove kao da su ga napisali. Najmanja jedinica bodova koja se dodjeljuje jest 1 bod.

Zadatak 1. (ukupno bodova: 12)

Na dnu zgrade u cijevi kružnog poprečnog presjeka u kojoj teče voda ukupan je tlak 300 kPa te je taj tlak jednak ukupnom tlaku u toj cijevi na vrhu zgrade. Ako se protok zaustavi, ukupni tlak na vrhu padne na 125 kPa, što je upola manje od tlaka na dnu u tom slučaju. Odredite:
(a) visinu zgrade
(b) brzinu kojom voda teče kroz cijev na dnu i na vrhu
(c) polumjer cijevi na dnu ako je na vrhu njezin polumjer 2 cm.

(d) Ako bismo s vrha zgrade iz te cijevi pustili vodu u horizontalnom smjeru istom brzinom kao i u pitanju pod (b), na kojoj bi udaljenosti od zgrade ona dotaknula tlo? Pretpostavite da se voda ponaša kao idealan fluid gustoće 1 kg/L, da nema grananja u cijevi, niti otpora zraka.

Rješenje:

(a) Promotrimo prvo slučaj kada voda ne teče. Tada je razlika tlakova Δp vrha i dna zgrade isključivo posljedica hidrostatskog tlaka, iz čega možemo izračunati visinu zgrade h_z **(1 bod za ovakav zaključak te 1 bod za ispravno izračunat h_z)**

$$125\,\mathrm{kPa} = \Delta p = \rho g h_z \quad \Rightarrow \quad h_z = \frac{\Delta p}{\rho g} = 12.742\ \mathrm{m}\,,$$

pri čemu je ρ gustoća vode, a g ubrzanje sile teže blizu površine Zemlje.

(b) Kada voda ne teče, ukupni tlak na vrhu zgrade jednak je statičkom tlaku u sustavu, p_0 (koji, primjerice, može dolaziti od vodotornja na kojega je cijev spojena, a koji se nalazi na većoj visini), te je stoga $p_0 = 125$ kPa **(1 bod za uzimanje u obzir dodatnog člana u tlaku, p_0, te 1 bod za ispravno izračunat p_0)**.

Kada voda teče, potrebno je uzeti u obzir i dinamički tlak. Na dnu zgrade vrijedi **(1 bod za poznavanje izraza za ukupni tlak te 1 bod za ispravno izračunat v_{dno})**

$$p_{\mathrm{dno}} = \rho g h_z + p_0 + \frac{1}{2}\rho v_{\mathrm{dno}}^2 \quad \Rightarrow \quad v_{\mathrm{dno}} = 10.000\ \mathrm{m/s}\,,$$

dok na vrhu vrijedi **(1 bod za ispravno izračunat v_{vrh})**

$$p_0 + \frac{1}{2}\rho v_{\mathrm{vrh}}^2 = p_{\mathrm{vrh}} = p_{\mathrm{dno}} \quad \Rightarrow \quad v_{\mathrm{vrh}} = 18.708\ \mathrm{m/s}\,.$$

(c) Kako bismo odredili polumjer cijevi na dnu, pozvat ćemo se na činjenicu da tok idealnog fluida mora biti konstanta te stoga vrijedi **(1 bod za ispravno napisanu jednadžbu kontinuiteta, tj. očuvanje toka, te 1 bod za ispravno izračunat polumjer $r_{\mathbf{dno}}$)**

$$v_{\mathrm{dno}} r_{\mathrm{dno}}^2 \pi = I_{\mathrm{dno}} = I_{\mathrm{vrh}} = v_{\mathrm{vrh}} r_{\mathrm{vrh}}^2 \pi \quad \Rightarrow \quad r_{\mathrm{dno}} = r_{\mathrm{vrh}} \sqrt{\frac{v_{\mathrm{vrh}}}{v_{\mathrm{dno}}}} = 2.736 \text{ cm}$$

(d) Voda koja izlazi iz cijevi čini horizontalni hitac, čiji je domet **(2 boda za ispravno napisanu ili izvedenu formulu za domet, ako učenici na fizikalno smislen način pokušaju izvesti tu formulu, ali naprave grešku u postupku, tada dodijeliti samo 1 bod)**

$$d = v_{\mathrm{vrh}} \sqrt{\frac{2h_z}{g}},$$

uvrštavanjem dobivamo **(1 bod za točan rezultat)**

$$d = 30.153 \text{ m}.$$

Zadatak 2. (ukupno bodova: 10)

Ledena santa oblika uspravne prizme pluta u oceanu tako da je 11.2 % njene visine izvan vode.

(a) Odredite gustoću leda.

(b) Odredite visinu i površinu baze sante ako je poznato da, kada se na nju popne jedan tuljan mase 75 kg, gornja se stranica sante nalazi 30 cm iznad površine vode, a kada se na njoj nalaze dva tuljana, svaki mase 75 kg, cijela je santa taman potopljena.

Uzmite da je gustoća oceana 1.025 g/mL te da je santa uvijek uspravna.

Rješenje:

(a) Neka je visina sante iznad vode a_0, a ispod b_0, tada vrijedi $a_0 = 0.112(a_0 + b_0)$ **(1 bod za ispravno korištenje postotaka)**. Izjednačavanje sila na tijelo daje **(1 bod za poznavanje Arhimedova zakona te 1 bod za sljedeću jednadžbu)**

$$\rho_V g b_0 A = (a_0 + b_0)\rho_L g A\,,$$

pri čemu je ρ_V gustoća oceana, ρ_L gustoća leda te A površna baze ledene sante. Sređivanjem slijedi **(1 bod za dobro izračunatu gustoću)**

$$\rho_L = \frac{b_0}{b_0 + a_0}\rho_V = 910.2\ \mathrm{kg/m^3}\,.$$

(b) U drugom dijelu zadatka neka je ponovno visina sante iznad s jednim tuljanom na njoj $a_T = 0.3\mathrm{m}$, a ispod b_T, što je nepoznato. Označimo li masu tuljana s m_T možemo zapisati sljedeće relacije **(po 1 bod za svaku jednadžbu)**, prvu za slučaj s jednim, a drugu za slučaj s dva tuljana na santi

$$Ag\left(\rho_V b_T - \rho_L(a_T + b_T)\right) = m_T g\,,$$
$$Ag\left(\rho_V(a_T + b_T) - \rho_L(a_T + b_T)\right) = 2m_T g\,.$$

Rješavanjem ovog sustava jednadžbi dolazimo do izraza za b_T, odnosno ukupnu visinu sante h **(1 bod za korištenje bilo koje valjane metode rješavanja sustava jednadžbi, 1 bod za ispravno riješen sustav te 1 bod za ispravno izračunat b_T ili h)**

$$b_T = \frac{\rho_V + \rho_L}{\rho_V - \rho_L} a_T = 5.057\ \mathrm{m}\,,$$

$$h = a_T + b_T = 5.357\ \mathrm{m}\,,$$

uvrstimo li dobivene veličine u bilo koju od jednadžbi iz sustava, možemo konačno odrediti površinu **(1 bod za ispravno izračunat A)**

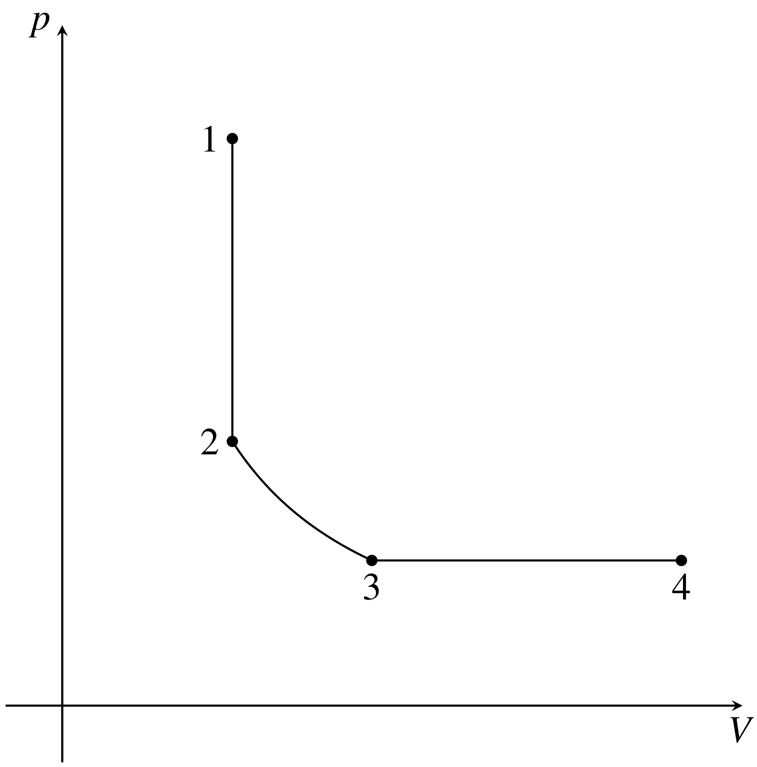
$$A = \frac{m_T}{\rho_V a_T} = 0.244\ \mathrm{m^2}\,.$$

Zadatak 3. (ukupno bodova: 9)

Promotrite idealan plin koji prolazi redom kroz sljedeće procese (pri čemu su brojevima označene početna, odnosno konačna stanja svakog od procesa):
(1-2) izohorno hlađenje pri kojem se temperatura plina smanji za 30 %
(2-3) izotermna ekspanzija
(3-4) izobarna promjena u kojoj se temperatura plina udvostruči te na kraju koje je tlak plina upola manji u usporedbi s tlakom s početka svih procesa (tlakom u stanju označenom s 1).

Odredite omjere početnih i konačnih temperatura te volumena plina (omjere za stanja označena s 1 i 4).
Skicirajte ovaj proces u $p-V$ dijagramu i naznačite u njemu točke koje predstavljaju stanja 1-4.

Rješenje:



(Po 1 bod za svaki proces koji je ispravno ucrtan u graf. Obratiti pažnju na to da su 1-2 i 3-4 predstavljeni ravnim crtama, dok je izoterma 2-3 zakrivljena.)

Proces 1-2 je izohoran pa će omjer početne i konačne temperature biti jednak omjeru tlakova, odnosno vrijedi da je $P_2 = 0.7P_1$ **(1 bod za ispravan omjer)**. Iz izobarnog procesa 3-4 možemo, uzevši u obzir informaciju o tlaku u stanju 4, zaključiti $P_3 = P_4 = 0.5P_1$ **(1 bod za ispravno korištenje uvjeta zadatka i izobare)**.
Koristeći se prethodno dobivenim relacijama, jednadžbom stanja idealnog plina te činjenicom da je 2-3 izotermni proces imamo **(1 bod za fizikalno smislen postupak dobivanja omjera za stanje 3)**

$$P_3V_3 = nRT_3 \quad \Rightarrow \quad 0.5P_1V_3 = nRT_2 \quad \Rightarrow \quad 0.5\frac{P_2}{0.7}V_3 = nRT_2 \quad \Rightarrow \quad V_3 = 1.4V_2\,.$$

Konačno, promjena 3-4 je izobarna te ako se pri njoj temperatura udvostruči, onda se i volumen udvostruči, to jest, $V_4 = 2V_3$ **(1 bod za ispravan omjer)**. Sve skupa, kombiniranjem prethodnih relacija rezultat je **(po 1 bod za svaki ispravni omjer)**

$$\frac{V_4}{V_1} = 2.8 \qquad \frac{T_4}{T_1} = 1.4\,.$$

Zadatak 4. (ukupno bodova: 7)

Velika kazaljka gradskog sata duljine 1 m napravljena je od ABS plastike, dok je pozadina na kojoj se nalaze brojevi staklena i oblika kruga radijusa 101 cm. Odredite na kojoj će temperaturi velika kazaljka točno dodirivati rub podloge. Koliki je tada omjer konačne i početne površine pozadine sata?

Koeficijent linearnog termalnog širenja stakla je $4 \cdot 10^{-6}\ K^{-1}$, dok je koeficijent linearnog termalnog širenja ABS plastike $60 \cdot 10^{-6}\ K^{-1}$. Pretpostavite da je početno mjerenje sata izvršeno na temperaturi od 20°C, da su prije navedeni koeficijenti konstante te da su svi elementi sata uvijek na istoj temperaturi.

Rješenje:

Koristeći se zakonom o termalnom širenju tijela imamo **(1 bod za poznavanje zakona te 1 bod za točne obje jednadžbe)**.

$$d_1 = d_0 \left(1 + \alpha_{\text{ABS}} \Delta T\right)$$

$$r_1 = r_0 \left(1 + \alpha_{\text{S}} \Delta T\right)$$

pri čemu su d duljina kazaljke, r radijus pozadine sata, α pripadni koeficijenti širenja i ΔT promjena temperature sata. Nulom u indeksu naznačeno je da je riječ o veličini u početnom stanju, a jedinicom u konačnom stanju. Po uvjetu zadatka mi tražimo temperaturu na kojoj je zadovoljeno $d_1 = r_1$, uvrštavanjem i raspisivanjem dobivamo **(1 bod za uvjet i 1 bod za rješavanje jednadžbe)**

$$\Delta T = \frac{r_0/d_0 - 1}{\alpha_{\text{ABS}} - \alpha_{\text{S}} r_0/d_0} = 178.699\ ^\circ\text{C}\,.$$

Konačna je temperatura tada jednaka $T_{\text{kon}} = 198.699$°C **(1 bod za ispravno određenu temperaturu)**.

Širenje površine sata opisano je s **(1 bod za ispravnu jednadžbu)**

$$A_1 = r_1^2 \pi \approx r_0^2 \pi \left(1 + 2\alpha_{\text{S}} \Delta T\right) = A_0 \left(1 + 2\alpha_{\text{S}} \Delta T\right).$$

Uvrstimo li prethodno izvedenu promjenu temperature, dobivamo traženi omjer **(1 bod za rezultat)**

$$\frac{A_1}{A_0} = 1.001\,.$$

Zadatak 5. (ukupno bodova: 12)

Na jedan kraj U-cijevi površine poprečnog presjeka 5 cm^2 ispunjene živom spojen je spremnik pun idealnog plina, dok je drugi kraj otvoren tvoreći tako aparaturu koju nazivamo plinskim termometrom.
Ako je početni volumen plina 5 L, tlak jednak jednoj atmosferi i temperatura 20°C odredite:
(a) koliko se stupac žive podigne kada se plin zagrije za 20 °C zanemarujući pri tome promjenu volumena plina zbog pomicanja žive
(b) koliki je rezultat u slučaju kada se ne zanemari promjena volumena.

Uzmite da je gustoća žive konstantna i da iznosi 13545.85 $\mathrm{kg/m^3}$. Zanemarite toplinsko širenje svih komponenti osim plina. Pretpostavite da je tlak okolnog zraka jedna atmosfera. Pretpostavite da u cijevi ima dovoljno žive da se njezina površina uvijek nalazi na okomito usmjerenom dijelu cijevi.

Rješenje:

(1 bod za ispravnu konverziju volumena i površine u m^3 i m^2, dodijeliti bodove i u slučaju kada je to implicitno napravljeno. 1 bod za konverziju temperatura u Kelvine, dodijeliti bodove i u slučaju kada je to implicitno napravljeno.)

(a) U početnom trenutku temperatura plina je:

$$T_0 = 293.15\,\mathrm{K}\,.$$

Koristeći jednadžbom stanja idealnog plina možemo dobiti
(1 bod za ispravno korištenje jednadžbe stanja)

$$pV = nRT \quad \Rightarrow \quad nR = p_{\mathrm{atm}}V_0/T_0\,,$$

pri čemu su V_0 i T_0 početni volumen i temperatura, a p_{atm} atmosferski tlak. Zagrijavanjem se plin širi te ako se stupac žive na suprotnoj strani U-cijevi podigne za Δh u odnosu na početnu razinu, tada vrijedi **(2 boda za jednadžbu stanja s ispravnim dodatnim članom za tlak)**

$$\left(p_{\mathrm{atm}} + 2\rho_{\mathrm{Hg}}\Delta h_{\mathrm{V\ konst.}}g\right)V_0 = nR\left(T_0 + \Delta T\right)\,,$$

pri čemu je ρ_{Hg} gustoća žive, g ubrzanje sile teže blizu površine Zemlje i ΔT povećanje temperature plina jednako 20 K. Sređivanjem izraza dobivamo **(1 bod za ispravno izračunatu visinu)**

$$\Delta h_{\mathrm{V\ konst.}} = \frac{p_{\mathrm{atm}}\Delta T}{2\rho_{\mathrm{Hg}}gT_0} = 0.026\,\mathrm{m}\,.$$

(b) S druge strane, ako ne zanemarimo promjenu volumena, dobivamo sljedeću relaciju
(3 boda za jednadžbu stanja s ispravnim dodatnim članovima za tlak i volumen)

$$\left(p_{\mathrm{atm}} + 2\rho_{\mathrm{Hg}}\Delta hg\right)\left(V_0 + A\Delta h\right) = nR\left(T_0 + \Delta T\right)\,,$$

pri čemu je A površina poprečnog presjeka cijevi. Raspisivanjem dolazimo do kvadratne jednadžbe, čiji su korijeni **(1 bod za ispravne korijene jednadžbe, bilo u varijabilnom obliku bilo s numeričkim koeficijentima)**

$$\Delta h_{1,2} = \frac{-2\rho_{\mathrm{Hg}}gV_0 - p_{\mathrm{atm}}A \pm \sqrt{\left(2\rho_{\mathrm{Hg}}gV_0 + p_{\mathrm{atm}}A\right)^2 + 8_{\mathrm{Hg}}gAp_{\mathrm{atm}}V_0\Delta T/T_0}}{4\rho_{\mathrm{Hg}}gA}\,.$$

Jedino je pozitivan predznak korijena diskriminante fizikalan **(1 bod za odabir predznaka)**, pa njega biramo te uvrštavanjem svih vrijednosti dobivamo **(1 bod za ispravno izračunatu visinu)**

$$\Delta h = 0.025\ \mathrm{m}\,.$$

Fizikalne konstante:
$g = 9.81 \text{m/s}^2$
$p_{\text{atm}} = 101300$ Pa
$T_0 = -273.15\ ^\circ\text{C}$
$R = 8.314$ J/Kmol

ŠKOLSKO NATJECANJE IZ FIZIKE
3. SKUPINA ZADATAKA
ŠKOLSKA GODINA 2024./2025.

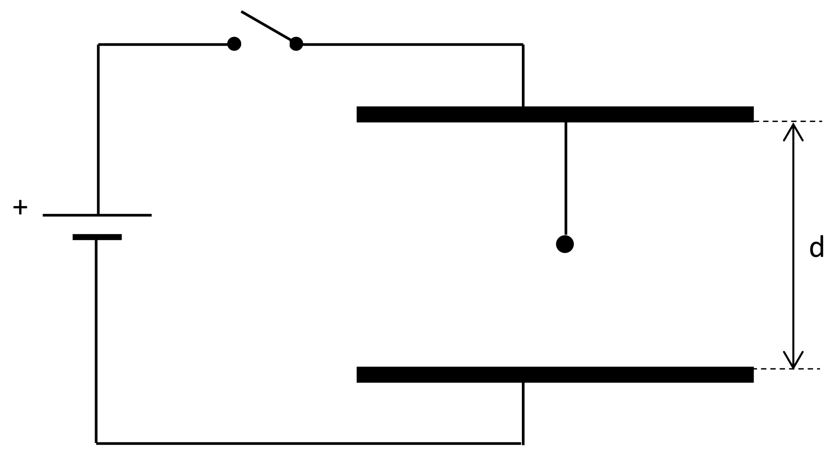
VAŽNO: Tijekom ispita učenici se ne smiju koristiti nikakvim pisanim materijalom (knjigama, bilježnicama, formulama...). Za pisanje treba se koristiti kemijskom olovkom ili nalivperom. Učenici pri ruci ne smiju imati mobitel ni druge elektroničke uređaje osim kalkulatora.

Zadatak 1. (10 bodova)

Mala naelektrizirana metalna kuglica mase 20 g obješena je o tanku nit izrađenu od električnog izolatora, tvoreći matematičko njihalo. Njihalo je obješeno o metalnu ploču tako da je nit okomita na površinu ploče, dok je njihalo u ravnoteži. Na udaljenosti $d = 10$ cm od metalne ploče postavljena je paralelno druga, jednaka metalna ploča tako da tvori veliki kondenzator. Metalna kuglica može se slobodno njihati u prostoru između dviju ploča. Pretpostavite da su ploče dovoljno velike da se mogu zanemariti svi rubni efekti. Prostor između ploča ispunjen je zrakom pa možete zanemariti silu uzgona i otpor zraka. Gornja ploča spojena je na pozitivan pol izvora istosmjerne struje napona 35 V, a donja ploča na negativan pol (vidi sliku). Zanemarite unutarnji otpor izvora.

Isključimo izvor napona i pažljivo zanjišemo njihalo s malim pomakom, te izmjerimo period njihanja 0.5 s. Uključimo li izvor napona, period njihala skrati se na 0.43 s.

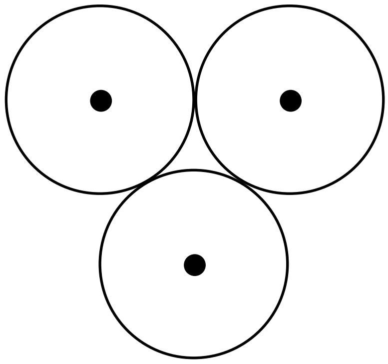
a) Odredite duljinu matematičkog njihala i količinu naboja na metalnoj kuglici.
b) Koliko će iznositi period njihala ako zamijenimo polaritet izvora tako da gornja ploča bude spojena na negativan, a donja ploča na pozitivan pol izvora?



Zadatak 2. (10 bodova)
Vrlo dugi bakreni vodič izoliran je debelim plastičnim PVC izolatorom polumjera 1 cm. Tri tako izolirana vodiča postavljena su paralelno jedan uz drugi (vidi presjek prikazan na slici – slika nije u mjerilu).

a) Koliko iznosi i kojeg je smjera magnetsko polje u svakom od vodiča, uzrokovano protjecanjem struje kroz preostala dva vodiča?
b) Koliko iznosi i kojeg je smjera sila po jedinici duljine vodiča?

U sva tri vodiča teče struja iznosa 100 mA u istom smjeru. Magnetska permeabilnost PVC plastike vrlo je mala, gotovo jednaka magnetskoj permeabilnosti vakuuma. Pretpostavite da je promjer presjeka vodiča mnogo manji od razmaka između paralelnih vodiča.

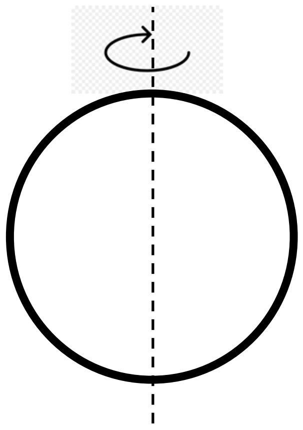


Zadatak 3. (10 bodova)
Astronaut ima na raspolaganju uteg mase *m*, dvije jednake opruge istih koeficijenata elastičnosti $k_1 = k_2 = k$ i nerastezljivu nit dužine *l* pomoću kojih može izraditi njihalo i oscilator s oprugama. Posjeduje samo zapornu uru kojom može mjeriti vrijeme te je izmjerio period njihala 2 s. Oscilator s oprugama može izraditi tako da dvije opruge spoji paralelno te izmjeri period osciliranja 3 s. Koliki bi period osciliranja astronaut izmjerio da opruge spoji serijski? Koliko iznosi duljina niti *l*?
Kolike će periode njihala i oscilatora s različito spojenim oprugama izmjeriti na Mjesecu gdje je ubrzanje sile teže $1.625\ \text{m/s}^2$

Zadatak 4. (10 bodova)

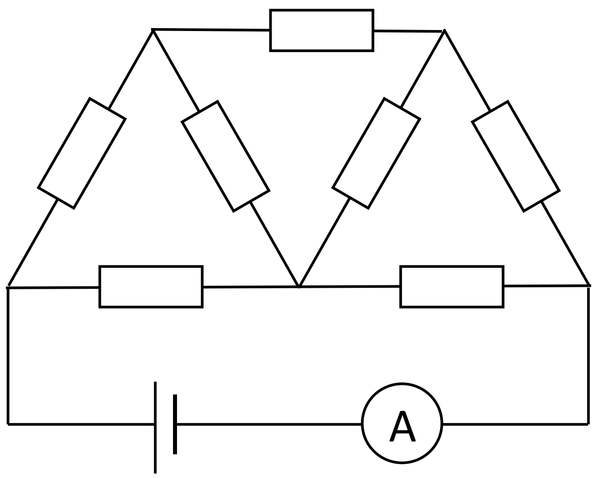
Bakreni prsten polumjera 5 cm rotira u homogenom magnetskom polju jakosti 0.5 T frekvencijom 20 Hz. Os rotacije okomita je na smjer magnetskog polja. Prsten rotira oko osi koja prolazi njegovim promjerom, a nalazi se u ravnini prstena (vidi sliku).

a) Koliki se srednji elektromotorni napon inducira u prstenu u polovici perioda rotacije između dvaju uzastopnih položaja u kojima je magnetski tok kroz prsten najveći?
b) Koliki je srednji iznos inducirane struje u prstenu tijekom pola perioda rotacije pod a) ako je električna otpornost bakra $1.68 \cdot 10^{-8}\ \Omega\mathrm{m}$, a poprečni presjek vodiča u prstenu 3 mm^2?



Zadatak 5. (10 bodova)

Ako je izmjerena jakost struje 5 A u prikazanom krugu, koliko iznosi napon izvora? Zanemarite unutarnji otpor izvora. Svi su otpornici jednaki i otpora 10 Ω.



ŠKOLSKO NATJECANJE IZ FIZIKE

3. SKUPINA ZADATAKA

ŠKOLSKA GODINA 2024./2025.

RJEŠENJA

Zadatak 1. (10 bodova)
Rješenje
Između metalnih ploča nastat će homogeno električno polje uključivanjem istosmjernog izvora. Kada je izvor isključen, električno polje neće djelovati na elektriziranu kuglicu, a kuglica će se njihati samo pod utjecajem sile teže. Period njihala s isključenim izvorom i električnim poljem iznosi:

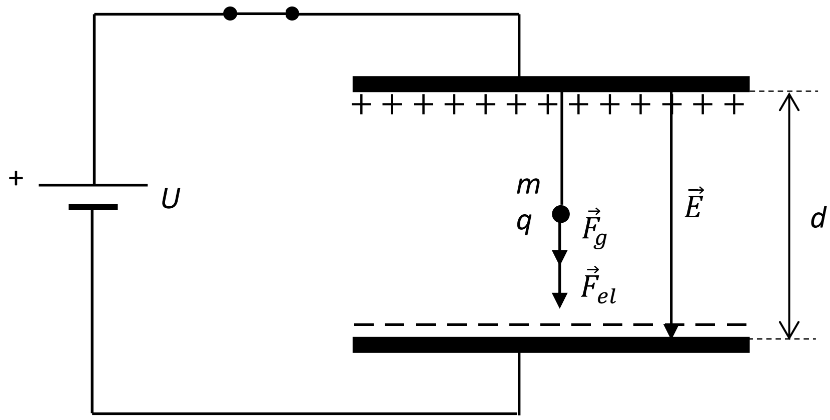
$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$ 0.5 boda

Poznavajući period njihala s isključenim izvorom, možemo odrediti duljinu njihala:

$$l = g \cdot \frac{T_0^2}{4\pi^2} = 0.0621 \text{ m} = 6.21 \text{ cm}$$ 1 bod

Kada uključimo izvor napona *U*, gornja ploča nabije se pozitivnim nabojem i u prostoru između ploča razmaknutih za udaljenost *d* nastaje električno polje smjera prikazanog na slici i iznosa:

$$E = \frac{U}{d}$$ 0.5 boda



Uz silu težu $\vec{F}_g$, na metalnu naelektriziranu kuglicu djeluje i električno polje $\vec{E}$ električnom silom $\vec{F}_{el}$ na naboj q na površini metalne kuglice mase m.
Električna sila na metalnu kuglicu iznosi:

$$F_{el} = q \cdot E = \frac{qU}{d}$$ 1 bod

Sila teža iznosi:

$$F_g = m \cdot g$$

Ukupna sila na kuglicu iznosi:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_g + \vec{F}_{el}$$

Odnosno po iznosu (vidi sliku gore):

$$F_R = F_g + F_{el} = mg + \frac{qU}{d}$$ 1 bod

Prema 1. Newtonovu zakonu, rezultantno ubrzanje *a* kuglice iznosi:

$$F_R = a \cdot m = mg + \frac{qU}{d}$$

$$a = \frac{qU}{md} + g$$ 1 bod

Kako bismo odredili period njihala s uključenim električnim poljem, potrebno je ubrzanje sile teže zamijeniti rezultantnim ubrzanjem u relaciji za period matematičkog njihala:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{a}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g + \frac{qU}{md}}}$$ 1 bod

S obzirom na to da poznajemo period T_1 njihala s uključenim električnim poljem, iz gornje relacije odredi se naboj na metalnoj kuglici:

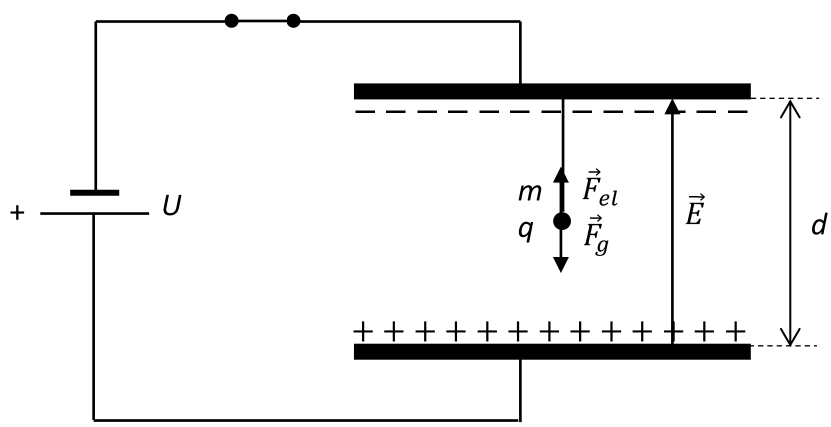
$$\frac{l}{g + \frac{qU}{md}} = \frac{T_1^2}{4\pi^2}$$

$$g + \frac{qU}{md} = l \cdot \frac{4\pi^2}{T_1^2}$$

$$q = \frac{md}{U}\left(\frac{4\pi^2 l}{T_1^2} - g\right)$$

$$q = 1.97 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{C} = 197\ \mu\mathrm{C}$$ 1 bod

Ako se polaritet izvora obrne, električno polje i električna sila djelovat će u suprotnom smjeru od smjera sile teže (vidi sliku)



Rezultantna je sila sada (pozitivan je smjer od gornje prema donjoj ploči):

$$F_R' = F_g - F_{el} = mg - \frac{qU}{d}$$

Rezultantno ubrzanje a' sada je:

$$F_R' = a' \cdot m = mg - \frac{qU}{d}$$

$$a' = g - \frac{qU}{md}$$ 1 bod

Novi je period njihala:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{a'}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g - \frac{qU}{md}}}$$ 1 bod

$$T_2 = 0.621\ \mathrm{s}$$ 1 bod

Zadatak 2. (10 bodova)
Rješenje.
Polumjer izolatora:

$$R = 1\ \text{cm}$$

Primijetite da vodiči u izolatoru čine jednakostranični trokut duljine stranice jednake promjeru presjeka izolatora:

$$a = 2R = 2\ \text{cm}$$

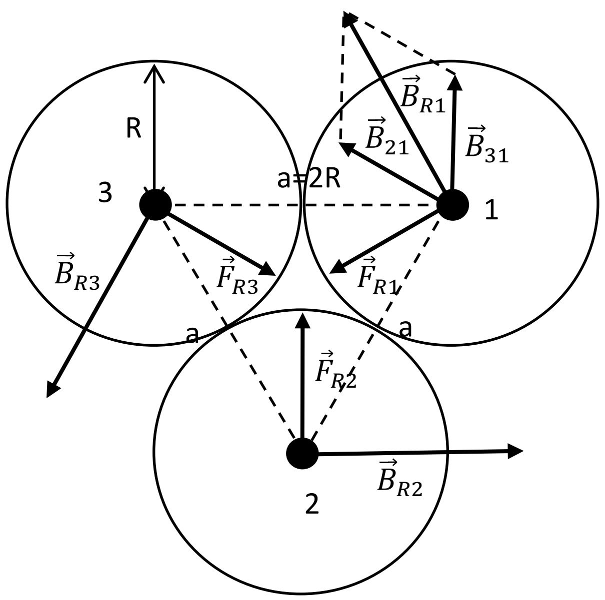
Magnetsko polje na udaljenosti *r* od beskonačno dugačkog vodiča kroz koju teče struja *I*, a nalazi se u sredstvu relativne magnetske permeabilnosti μ_r:

$$B = \mu_0 \mu_r \frac{I}{2\pi r}$$ 1 bod

Problem je simetričan, pa se svodi na rješavanje za proizvoljno odabrani vodič. Riješimo problem za vodič označen s 1 na donjoj slici, gdje smo (proizvoljno) odabrali tok struje iz papira prema promatraču.

Magnetsko polje zbog toka struje kroz vodič 2 na mjestu vodiča 1 iznosi ($\mu_r \approx 1$):

$$B_{21} = \mu_0 \frac{I}{2\pi a}$$ 1 bod



Isto magnetsko polje uzrokuje tok struje kroz vodič 3 na mjestu vodiča 1:

$$B_{31} = \mu_0 \frac{I}{2\pi a}$$ 1 bod

Rezultantno magnetsko polje dobijemo zbrojem vektora magnetskih polja vodiča 2 i 3 na mjestu vodiča 1:

$$\vec{B}_{R1} = \vec{B}_{21} + \vec{B}_{31}$$

S gornje slike, s obzirom na to da se radi o poligonu s jednakostraničnim trokutom duljine stranice jednake $B_{21} = B_{31}$, potrebno je odrediti visinu jednakostraničnog trokuta:

$$B_{R1} = 2B_{21}\frac{\sqrt{3}}{2} = B_{21}\sqrt{3} = B_{31}\sqrt{3}$$ 1 bod

$$B_{R1} = \mu_0 \frac{I}{4\pi R}\sqrt{3} = 1.73 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{T}$$ 1 bod

Sila na vodič duljine *l* uronjen u magnetsko polje jakosti *B* iznosi: 1 bod

$$F = BIl\sin\alpha$$

Gdje je α kut između vodiča (smjera struje) i smjera magnetskog polja.
Kako je smjer rezultantnog magnetskog polja okomit na smjer struje kroz vodič:

$$\alpha = 90° \quad \Longrightarrow \quad F = BIl$$

$$\frac{F}{l} = BI = 1.73 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{N/m}$$ 1 bod

Smjer sile okomit je na smjer rezultantnog magnetskog polja i struje kroz vodič (vidi sliku).

Ispravno ucrtana rezultantna magnetska polja (smjer) na slici 1 bod

Ispravno ucrtane komponente magnetskog polja (smjer) vodiča 2 i 3 na mjestu vodiča 1 barem za jedan vodič 1 bod

Ispravno ucrtane sile (smjer) na slici 1 bod

NAPOMENA: Zadatak je moguće riješiti tako da se prvo odrede sile na vodič, a zatim magnetska polja. Ovakav postupak jednako je valjan, te ga treba ocijeniti na isti način kako je gore prikazano, samo zamijeniti magnetsko polje sa silom u prvom dijelu rješenja, odnosno silu s magnetskim poljem u drugom dijelu rješenja, kako slijedi.
Sila između dvaju paralelnih vodiča dužine *l* razmaknute za *a* kojima teče struja jakosti I_1 i I_2:

$$F = \frac{\mu_0\mu_r}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{a} l$$ 1 bod

Struje su iste jakosti ($I_1 = I_2 = I$), dok je $\mu_r \approx 1$:

$$F/l = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I^2}{2R}$$ 1 bod

Sile vodiča 2 na vodič 1, i vodiča 3 na vodič 1 su:

$$F_{21}/l = F_{31}/l = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I^2}{2R}$$ 1 bod

Sile vodiča 2 na vodič 1 i vodiča 3 na vodič 1 zatvaraju kut 60°, pa se rješavanjem za visinu jednakostraničnog trokuta dobije za rezultantnu silu na vodič 1:

$$F_{R1}/l = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I^2}{2R}\sqrt{3} = 1.73 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{N/m}$$ 2 boda

Magnetsko polje dobije se iz relacije:

$$F = BIl\sin\alpha \quad \Longrightarrow \quad B = \frac{F}{l}\frac{1}{I\sin\alpha}$$ 1 bod

Za silu okomitu na smjer struje u vodiču, $\alpha = 90°$, vrijedi da je rezultantno magnetsko polje na vodič 1 jednaka:

$$B_{R1} = \frac{F}{l}\frac{1}{I} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R}\sqrt{3} = 1.73\cdot 10^{-6}\ \mathrm{T}$$ 1 bod

Ispravno ucrtane rezultantne sile (smjer) na slici 1 bod

Ispravno ucrtane komponente sila (smjer) između vodiča 2 i 1 te između vodiča 3 i 1 barem za jedan vodič 1 bod

Ispravno ucrtana magnetska polja (smjer) na slici 1 bod

Zadatak 3. (10 bodova)
Rješenje.
Period njihala na Zemlji iznosi:

$$T_{njih} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$ 1 bod

Iz gornje relacije dobijemo duljinu niti:

$$l = \frac{g \cdot T_{njih}^2}{4\pi^2} = 0.995\ \mathrm{m}$$ 1 bod

---

Dvije opruge možemo u oscilator spojiti serijski ili paralelno. Za paralelno spojene opruge period oscilatora iznosi:

$$k_{par} = k_1 + k_2 = 2k$$ 1 bod

$$T_{osc,par} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_{par}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$$ 1 bod

Za serijski spojene opruge ukupni koeficijent elastičnosti i period iznose:

$$\frac{1}{k_{ser}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{2}{k}$$ 1 bod

$$k_{ser} = \frac{k}{2}$$

$$T_{osc,ser} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_{ser}}} = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{k}}$$ 1 bod

---

Poznavajući period oscilatora s paralelno spojenim oprugama, možemo odrediti *m/k*:

$$\frac{m}{k} = \frac{T_{osc,par}^2}{2\pi^2}$$

i uvrstiti u relaciju za period oscilatora sa serijski spojenim oprugama:

$$T_{osc,ser} = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{2T_{osc,par}^2}{2\pi^2}} = 2T_{osc,par} = 6\ \mathrm{s}$$ 2 boda

---

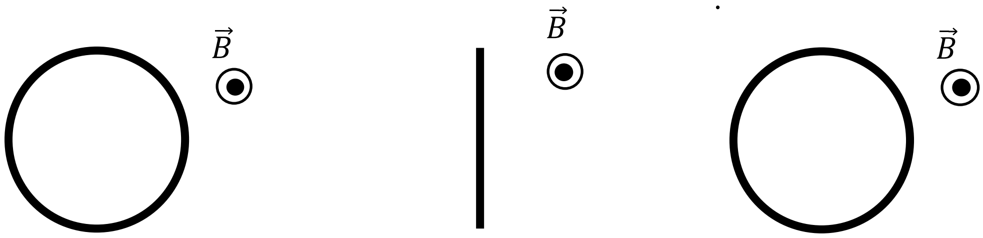
Na Mjesecu će oscilator s oprugama spojenim paralelno ili serijski imati jednak period jer period oscilatora s oprugama ne ovisi o ubrzanju sile teže. 1 bod

---

Period njihala na Mjesecu iznosit će:

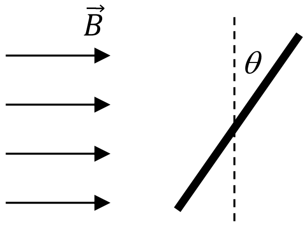
$$T_{njih,Mjesec} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_{Mjesec}}} = 4.91\ s$$ 1 bod

Zadatak 4. (10 bodova)
Rješenje.
U jednoj polovici perioda rotacije prsten se okrene za 180°. Tok magnetskog polja kroz prsten maksimalan je kada je površina prstena okomita na smjer magnetskog polja, a minimalan kada je površina prstena paralelna sa smjerom magnetskog polja.
Rotacija prstena tijekom koje moramo odrediti srednji elektromotorni napon prikazana je na donjoj slici:



t=0 t=T/4 t=T/2

Rotaciju prstena možemo prikazati i na slici dolje, gdje je u početnom trenutku $t = 0$ kut $\theta = 0°$, te se prsten rotira do kuta $\theta = 180°$ (jedna polovica perioda rotacije)



2 boda

Tok magnetskog polja kao umnožak jakosti magnetskog polja i površine projekcije petlje u ravninu okomitu na smjer magnetskog polja je:

$$\Phi(t) = B \cdot A \cdot \cos\theta(t)$$ 1 bod

Rotacijom petlje u magnetskom polju mijenja se i površina projekcije petlje, pa tako i magnetski tok.
Inducirani elektromotorni napon po svom je iznosu jednak:

$$U = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$ 1 bod

U početnom trenutku $t = 0$, kut $\theta = 0°$ pa je magnetski tok:

$$\Phi_1(t = 0) = B \cdot A \cdot \cos 0° = BA$$

U konačnom trenutku $t = T/2$, kut $\theta = 180°$ pa je magnetski tok:

$$\Phi_2(t = T/2) = B \cdot A \cdot \cos 180° = -BA$$

Srednji inducirani elektromotorni napon u vremenu $\Delta t = T/2$ iznosi:

$$U = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{T/2}$$ 1 bod

$$U = -\frac{2BA}{T/2}$$ 1 bod

Površina prstena:

$$A = r^2\pi$$

Period rotacije:

$$T = \frac{1}{f} \qquad \text{1 bod}$$

Konačno dobijemo za srednji elektromotorni napon:

$$U = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{2BA}{\frac{T}{2}} = -4f \cdot B \cdot r^2\pi = -0.314\ \mathrm{V} \qquad \text{1 bod}$$

Rezultat za srednji elektromotorni napon potrebno je uvažiti bez obzira na predznak.

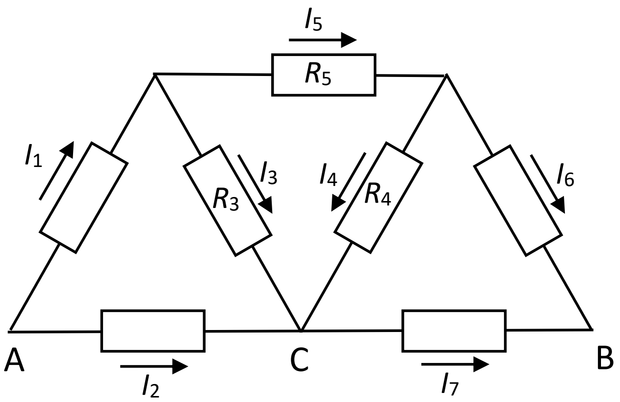
Otpor bakrenog prstena duljine opsega $l = 2r\pi = 31.4\ \mathrm{cm}$ i poprečnog presjeka $S = 3\ \mathrm{mm}^2$ iznosi:

$$R = \rho\frac{l}{S} = 1.758\ \mathrm{m\Omega} = 0.001758\ \Omega \qquad \text{1 bod}$$

Srednja inducirana struja iznosi:

$$I = \frac{U}{R} = 179\ \mathrm{A} \qquad \text{1 bod}$$

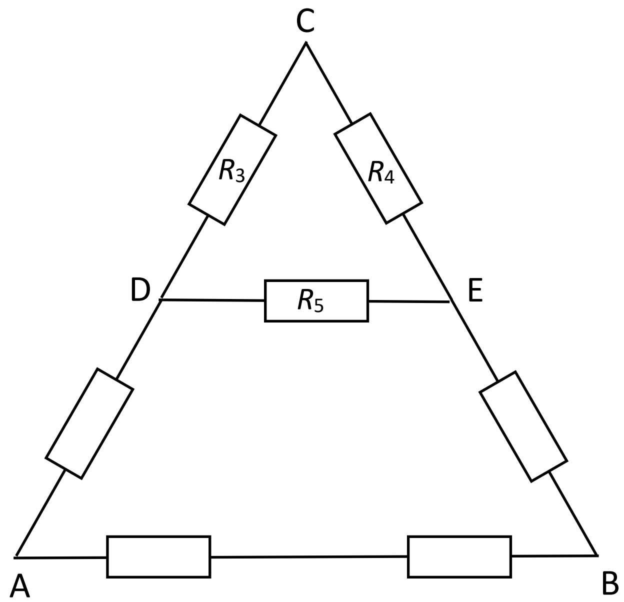
Zadatak 5. (10 bodova)
Rješenje.
Potrebno je odrediti ekvivalentni otpor u prikazanom krugu koji moramo pojednostaviti. Primijetimo točku C koja predstavlja čvor, i koja se može prikazati kao na slici dolje. Označimo struje kao na slici.



S obzirom na to da su svi otpornici jednaki, iz simetrije problema vidljivo je da su struje $I_1 = I_6$ i $I_2 = I_7$ pa su stoga i struje

$$I_3 = -I_4$$

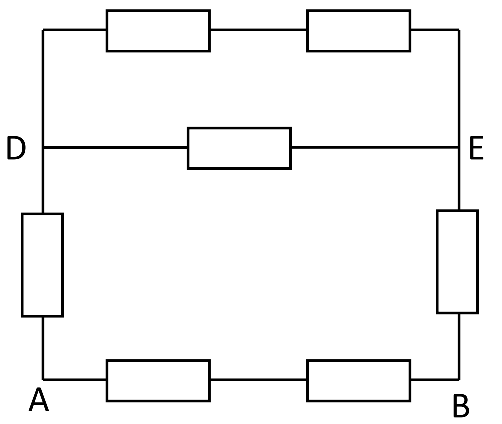
iz čega je vidljivo da ista struja prolazi kroz otpornike *R₃* i *R₄* pa ih možemo prikazati u serijskom spoju kao na slici dolje. 1 bod



1 bod

Iz gornje sheme vidljivo je da su čvorovi u točkama A, B, D i E, a u grani DCE dva su otpornika spojena serijski.

Gornju shemu možemo prikazati kao:

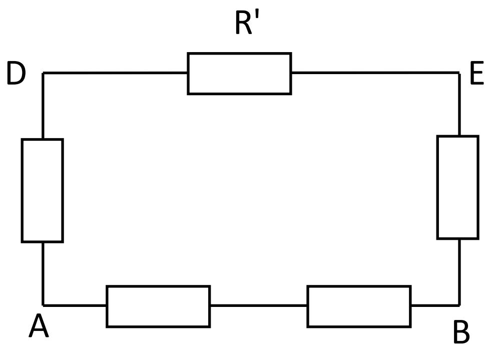


1 bod

Između točaka D i E imamo paralelni spoj otpornika R i 2R, pa je njihov ekvivalentni otpor:

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} = \frac{3}{2R}$$ 1 bod

$$R' = \frac{2}{3}R$$

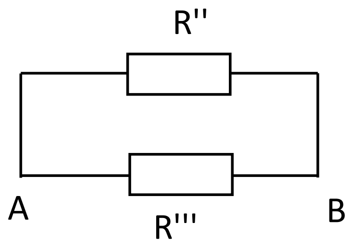


1 bod

Otpornici u grani ADEB serijski su spojeni, te zatim paralelno s dva serijska otpornika u grani AB:

$$R'' = 2R + R' = \frac{8}{3}R$$ 1 bod

$$R''' = R + R = 2R$$ 1 bod



Konačno, ekvivalentni otpor iznosi:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R''} + \frac{1}{R'''} = \frac{3}{8R} + \frac{1}{2R} = \frac{7}{8R}$$

$$R_{eq} = \frac{8}{7}R = 11.43\ \Omega$$ 1 bod

Napon između točaka A i B, što je ujedno i napon izvora, jednak je:

$$U = IR_{eq}$$ 1 bod

$$U = 57.14\ \mathrm{V}$$ 1 bod

NAPOMENA: Ako učenik zadatak riješi na drugačiji način, no dobije iste i/ili ekvivalentne rezultate, treba priznati postupak. Zadatak je moguće riješiti i primjenom Kirchoffovih pravila.

Školsko natjecanje iz fizike, šk. god. 2024./2025.
Srednja škola, 4. skupina
(17. 2. 2025.)

ZADATCI

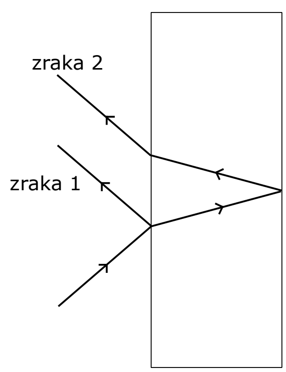
VAŽNO: Tijekom ispita učenici ne smiju imati nikakav pisani materijal (knjige, bilježnice, formule...). Za pisanje treba se koristiti kemijskom olovkom ili nalivperom. Učenici pri ruci ne smiju imati mobitel ni druge elektroničke uređaje osim kalkulatora.

Dodatna napomena: Oznaka c odnosi se na brzinu svjetlosti u vakuumu čak i ako to u zadatku nije izričito navedeno. Za indeks loma zraka uzmite $n_z = 1$.

1. (9 bodova) Mioni su nestabilne subatomske čestice koje se raspadaju u elektrone s prosječnim vremenom života od $2.2\,\mu s$. a) Recimo da si dva miona u sudarivaču prilaze relativnom brzinom od $0.89\,c$, gdje je c brzina svjetlosti u vakuumu. Mirujući u laboratorijskom referentnom sustavu, May mjeri da su iznosi brzina ovih dvaju miona međusobno jednaki. Koliki je njihov iznos u laboratorijskom sutavu?
b) Razmotrimo sad samo jedan od miona iz zadatka a). Drugog miona nema, a stoga ni sudara. Koliki je prosječan put koji će ovaj mion prijeći, iz perspektive May, prije raspada?

2. (10 bodova) Pobjeđujući u međuzvjezdanoj utrci, Mavis, koja sjedi na prednjem kraju svog svemirskog broda, njime leti kroz ciljnu ravninu brzinom $0.6\,c$ u odnosu na tu ravninu. Uzvikuje "Hura!", a odašiljač na stražnjem kraju njezina broda prosljeđuje tu poruku svim ostalim sudionicima i gledateljima (događaj 2) upravo u trenutku (u Mavisinu referentnom sustavu) kad prednji dio broda prelazi ciljnu ravninu (događaj 1). Ona mjeri duljinu broda kao 300 m. Stanley stoji u ciljnoj ravnini i miruje s obzirom na ravninu. Iz Stanleyjeve perspektive ova dva događaja nisu istovremena: on je izmjerio da se događaj 2 zbio $0.75\,\mu s$ prije događaja 1!
a) Na kojoj udaljenosti od ciljne ravnine Stanley mjeri poziciju zadnjeg kraja broda u trenutku događaja 2?
b) Ako je Stanley izmjerio da se događaj 2 zbio prije događaja 1, znači li to da relativnost nekako narušava načelo kauzalnosti, odnosno je li moguće da se posljedica dogodila prije uzroka? Da biste na to odgovorili, odredite koliko je minimalno Mavis morala uraniti s uzvikom u odnosu na prolazak cilja da bi u njezinu sustavu događaji 1 i 2 bili istovremeni. Što zaključujete o kauzalnosti?

3. (12 bodova) Vjerojatno ste mnogo puta vidjeli kako se sloj ulja šareni pod Sunčevom svjetlosti. To je posljedica tzv. interferencije na tankim listićima. Slika prikazuje ovu situaciju. Svjetlost upada na jednu plohu listića i dio se odmah reflektira (ovaj je slučaj predstavljen zrakom 1), dok drugi dio (zraka 2) prolazi u listić, reflektira se na nasuprotnoj plohi i u konačnici se vraća natrag, paralelno sa zrakom 1. Ove se dvije zrake u našem oku fokusiraju i interferiraju konstruktivno ili destruktivno, ovisno o razlici njihovih optičkih puteva.



a) Neka u označava upadni kut zraka na prvu plohu listića, l lomljeni kut u listiću, d njegovu debljinu, a n njegov indeks loma. Pretpostavite da se listić nalazi u zraku. Koristeći se zakonima refklesije i loma te trigonometrijskim identitetima, izrazite razliku optičkih puteva zraka 1 i 2 preko u, d i n. Pritom vodite računa da pri refleksiji na prijelazu iz optički rjeđeg u optički gušće sredstvo dolazi do faznog pomaka koji rezultira povećanjem optičkog puta od $\lambda/2$, gdje je λ valna duljina svjetlosti. Zanemarite činjenicu da se valna duljina mijenja pri prelasku iz jednog sredstva u drugo.

b) Razliku optičkih puteva iz zadatka a) usporedite s uvjetom za konstruktivnu interferenciju. Neka je debljina tankog sloja (odnosno listića) jednaka $d = 10\,\mu\mathrm{m}$, a svjetlost koja nam upada u oči na taj sloj upada pod kutom $u = 45°$. Hoće li nam se sloj ulja činiti više plavim ili crvenim? Indeksi loma ulja za plavu i crvenu svjetlost su $n_P = 1.477$ i $n_C = 1.463$, a za valne duljine uzmite 480 nm i 665 nm.

4. (8 bodova) Dječak visine 1.5 m stoji uz sam rub bazena savršeno ravnog dna koji je napunjen do samog vrha. Budući da nosi naočale s polaroidom, dječak primjećuje kako je svjetlost reflektirana od površine vode linearno polarizirana. Na dnu bazena njegova sjena završava na udaljenosti od 3 m od ruba uz koji stoji. a) Kolika je dubina bazena ako znamo da je indeks loma vode jednak 1.33? b) Pod kojim kutom, mjereno od okomice na površinu bazena, putuje svjetlost koja dječaku upada u oči? Zanemarite visinu dječakova čela.

5. (11 bodova) a) Za koju je konačnu vrijednost brzine omjer relativističke i nerelativističke kinetičke energije jednak 1.05? b) Kolika je razlika relativističke i nerelativističke količine gibanja (s obzirom na nerelativističku vrijednost) za satelit koji se nalazi blizu površine Marsa i jednoliko kruži oko njega? Za radijus Marsa uzmite $R_m = 3390\,\mathrm{km}$, a za njegovu masu $M_m = 6.39 \times 10^{23}\,\mathrm{kg}$. Gravitacijska je konstanta $G = 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$.

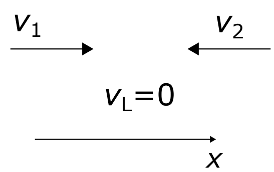
Školsko natjecanje iz fizike, šk. god. 2024./2025.
Srednja škola, 4. skupina
(17. 2. 2025.)

RJEŠENJA I SMJERNICE ZA BODOVANJE

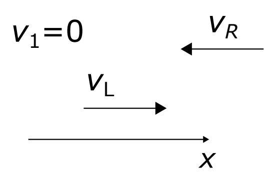
Ovdje je prikazan jedan način rješavanja zadataka. Ako učenici zadatak riješe na drugačiji, a fizikalno pravilan način, treba im dati puni broj bodova predviđen za taj zadatak. Ako učenici ne napišu posebno svaki ovdje predviđeni korak, a vidljivo je da su ga napravili, treba im dati bodove kao da su ga napisali.

1. a) Relativnu brzinu miona označimo s v_R. Trebamo voditi računa o tome da se brzine ovdje zbrajaju po specijalnoj, a ne Galileijevoj relativnosti. Usporedit ćemo laboratorijski sustav sa sustavom u kojem prvi mion miruje. Neka je iznos brzine laboratorija u potonjem sustavu jednak $v_L = 0.89\,c$. Koordinatni su sustavi orijentirani udesno, odnosno brzine su pozitivne ako su orijentirane udesno, a negativne ako su orijentirane ulijevo.

U laboratorijskom sustavu:



U sustavu prvog miona:



Primijetite da smo na drugoj skici brzinu laboratorija ucrtali ulijevo jer znamo da je to ispravan smjer kako bismo bili konzistentni s orijentacijom brzina na prvoj skici. Ako mion 1 putuje udesno s obzirom na laboratorij, tada laboratorij putuje ulijevo s obzirom na mion 1. S ovakvim orijentacijama brzina, za njih vrijedi sljedeće.

U sustavu prvog miona (**2 boda**):

$$v_1' = 0\,, \qquad v_2' = -v_R\,. \tag{1}$$

U laboratorijskom sustavu (**2 boda**):

$$v_1 = \frac{v_1' + v_L}{1 + v_1' v_L/c^2}\,, \qquad v_2 = \frac{v_2' + v_L}{1 + v_2' v_L/c^2}\,. \tag{2}$$

Uvrštavajući u posljednje izraze brzine dvaju miona u sustavu prvog miona, imamo dalje

$$v_1 = v_L\,, \qquad v_2 = \frac{-v_R + v_L}{1 - v_R v_L/c^2}\,. \tag{3}$$

Sjetimo se odredbe zadatka da su iznosi brzina dvaju miona međusobno jednaki u laboratorijskom sustavu. Očito su brzine međusobno suprotno orijentirane pa među njima postoji predznak “minus”:

$$v_1 = -v_2\,. \tag{4}$$

Ubacivanjem jednadžbe (3) u jednadžbu (4) imamo

$$v_L = \frac{v_R - v_L}{1 - v_R v_L / c^2}\,, \tag{5}$$

što se sređivanjem lako svodi na (**1 bod**)

$$v_L^2 - \frac{2c^2}{v_R} v_L + c^2 = 0\,. \tag{6}$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su

$$v_{L,1} \approx 1.63\,c\,, \qquad v_{L,2} \approx 0.61\,c\,. \tag{7}$$

Prvo rješenje odbacujemo kao nefizikalno, budući da mora vrijediti $v_L \leq c$. Zaključujemo da su brzine dvaju miona (**2 boda**)

$$v_1 = -v_2 \approx 0.61\,c \approx 1.83 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}\,. \tag{8}$$

b) U laboratorijskom sustavu mion putuje brzinom koju smo netom našli, $v_1 \approx 0.61\,c$. Zbog dilatacije vremena prosječno vrijeme života mu je u ovom sustavu jednako (**1 bod**)

$$\tau = \frac{\tau'}{\sqrt{1 - (v_1/c)^2}}\,, \tag{9}$$

pri čemu je $\tau' = 2.2\,\mathrm{\mu s}$ vlastito vrijeme života. Prosječni prijeđeni put tada je jednostavno (**1 bod**)

$$L = v_1 \tau = \frac{v_1 \tau'}{\sqrt{1 - (v_1/c)^2}}\,. \tag{10}$$

Uvrštavanjem v_1 i τ', imamo

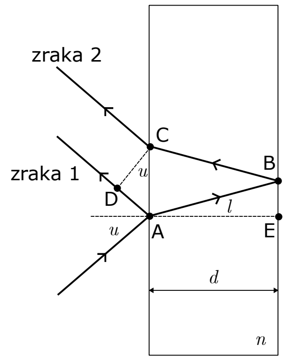
$$L \approx 508\,\mathrm{m}\,. \tag{11}$$

2. a) Duljina broda koju Mavis mjeri jest njegova vlastita duljina, budući da ona miruje s obzirom na brod. Ta je duljina, dakle, $L_0 = 300\,\mathrm{m}$. Možemo primijeniti formulu za kontrakciju duljine te zaključiti da je duljina broda u Stanleyjevu sustavu jednaka $L = 240\,\mathrm{m}$, pri čemu je $v = 0.6\,c$ brzina s obzirom na ciljnu ravninu, odnosno Stanleyja (**2 boda**). Međutim, to ne znači da bi Stanley rekao kako je u trenutku događaja 2 stražnji kraj broda na udaljenosti 240 m od ciljne ravnine. Problem je s tom logikom što za Stanleyja događaj 2 i prolazak kroz ciljnu ravninu (događaj 1) nisu istovremeni. Naime, od događaja 2 do događaja 1 Stanleyju će proći $\Delta t = 0.75\,\mathrm{\mu s}$. Brod će, pa tako i njegov prednji kraj, u tom vremenu prevaliti put od $\Delta x = v\Delta t = 135\,\mathrm{m}$ (**2 boda**). To znači da se u trenutku događaja 2 stražnji kraj nalazi na udaljenosti od $L + \Delta x = 375\,\mathrm{m}$ od ciljne ravnine (**2 boda**).

b) Stanley kaže kako se slanje poruke sa stražnjeg kraja dogodilo prije prolaska kroz ciljnu ravninu. Međutim, prolazak kroz ciljnu ravninu nije uzrok poruke poslane od strane odašiljača. Pravi je uzrok Mavisin uzvik, koji na neki način mora putovati s prednjeg na stražnji kraj broda, da bi ga odašiljač mogao proslijediti dalje. Najbrže što može putovati jest brzinom svjetlosti (**1 bod**). U Mavisinu sustavu mora prevaliti vlastitu duljinu broda, za što mu je u slučaju putovanja brzinom svjetlosti potrebno vrijeme od $\tau = c/L_0 = 1\,\mathrm{\mu s}$ (**2 boda**). Dakle, da bi događaji 1 i 2 iz Mavisine perspektive bili istovremeni, ona je morala uzviknuti najmanje 1 µs prije prolaska kroz cilj. To je vrijeme dulje od onoga koliko je, prema Stanleyju, poruka odaslana ranije u odnosu na prolazak kroz cilj. Dakle, uzrok je zbilja bio prije posljedice, bez obzira na referentni sustav (**1 bod**, za primjećivanje da je ovo vrijeme dulje i/ili da stoga kauzalnost nije narušena).

3. Radi lakšeg snalaženja, možemo označiti točke A, B, C, D i E kao na slici. Vrijedi $|AB| = |BC|$. Ako je indeks loma listića jednak n, sa slike je očito da je razlika u optičkim putevima zraka 1 i 2 jednaka (**2 boda**: 1 bod za množenje prvog dijela s indeksom loma te 1 bod za ispravno određivanje drugog dijela)

$$\Delta x = 2n|AB| - (|AD| + \lambda/2)\;. \tag{12}$$



Pritom $\lambda/2$ dolazi od toga što se zraka 1 reflektira na granici s optički gušćim sredstvom i gore može jednakovaljano pisati $\cdots - \lambda/2$. Tog pomaka nema u točki B, budući da je riječ o granici s optički rjeđim sredstvom.

Duljine $|AB|$ i $|AD|$ treba izraziti preko poznatih veličina. Iz pravokutnog trokuta ΔADC (**1 bod**):

$$\sin u = \frac{|AD|}{|AC|} \quad \Rightarrow \quad |AD| = |AC| \sin u \,. \tag{13}$$

Budući da je $|BE| = |AC|/2$, iz pravokutnog trokuta ΔABE imamo (**1 bod** + **1 bod**):

$$\tan l = \frac{|AD|}{2d} \quad \Rightarrow \quad |AC| = 2d \tan l \,, \tag{14}$$

$$\cos l = \frac{d}{|AB|} \quad \Rightarrow \quad |AB| = \frac{d}{\cos l} \,. \tag{15}$$

Supstitucijom jednadžbi (13), (14) i (15) u izraz (12), razlika optičkih puteva postaje

$$\Delta x = 2d \left(\frac{n}{\cos l} - \tan l \sin u \right) - \frac{\lambda}{2} \,. \tag{16}$$

Želimo se riješiti ovisnosti o lomljenom kutu, odnosno izraziti ga preko poznatih veličina. Snellov zakon loma kaže (**1 bod**)

$$\sin u = n \sin l \quad \Rightarrow \quad \sin l = \frac{\sin u}{n} \,. \tag{17}$$

Koristeći se trigonometrijskim identitetima $\sin^2 l + \cos^2 l = 1$ i $\tan l = \sin l / \cos l$, slijedi (**1 bod** + **1 bod**)

$$\cos l = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 u}{n^2}} \,, \tag{18}$$

$$\tan l = \frac{\sin u}{\sqrt{n^2 - \sin^2 u}} \,. \tag{19}$$

Uvrštavanjem u izraz (12) i sređivanjem, konačno nalazimo (**1 bod**)

$$\Delta x = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 u} - \frac{\lambda}{2} \,. \tag{20}$$

b) Uvjet konstruktivne interferencije jest da je razlika optičkih puteva jednaka cjelobrojnom višekratniku valne duljine (**1 bod**):

$$\Delta x = m\lambda \,, \quad m \in \mathbb{Z} \,. \tag{21}$$

Izjednačavanjem s izrazom (20) te uvrštavanjem zadanih veličina dobiva se $m_P \approx 53.5$ i $m_C \approx 38$. Dakle, crvena svjetlost doživljava gotovo savršenu konstruktivnu, a plava destruktivnu interferenciju, pa će se listić činiti crvenim (ukupno **2 boda** za izračun broja valnih duljina i zaključak).

4. Iz priložene skice očito je da je duljina sjene jednaka

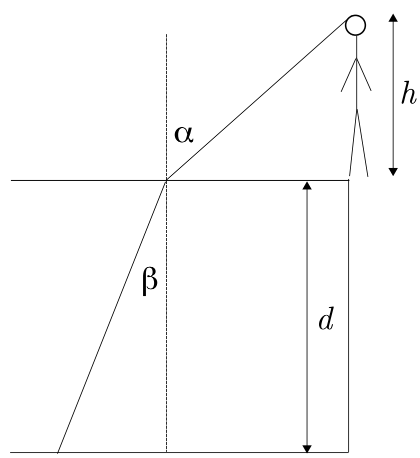
$$x = h \tan\alpha + d \tan\beta\,, \tag{22}$$

pri čemu je h dječakova visina, a d dubina bazena (**2 boda**). Iz činjenice da je svjetlost reflektirana od površine linearno polarizirana, znamo da upada pod Brewsterovim kutom, u kojem slučaju reflektirana i lomljena zraka zatvaraju pravi kut, $\alpha + \beta = \pi/2$ (**1 bod**). Snellov zakon loma kaže da je $n \sin\beta = \sin\alpha$ (**1 bod**), iz čega korištenjem identiteta $\sin(\pi/2 - \alpha) = \cos\alpha$ te $\cos(\pi/2 - \alpha) = \sin\alpha$ slijedi da je $\tan\alpha = n$ (**1 bod**) te $\tan\beta = \tan(\pi/2 - \alpha) = \cot\alpha = 1/n$ (**1 bod**). Iz toga odmah slijedi (**1 bod**) kako svjetlost koja dječaku upada u oči na površinu vode upada pod kutom

$$\alpha = \arctan n \approx 53^\circ\,. \tag{23}$$

Ubacivanjem u jednadžbu (22) i sređivanjem imamo (**1 bod**)

$$d = n(x - nh) \approx 1.337\,\mathrm{m}\,. \tag{24}$$



5. a) Relativistički izraz za kinetičku energiju je (**1 bod**)

$$E_k^R = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - 1 \right)\,, \tag{25}$$

dok je nerelativistički izraz jednak $E_k^{NR} = mv^2/2$. Po uvjetima zadatka, za traženu brzinu vrijedi

$$\frac{E_k^R}{E_k^{NR}} = r\,, \tag{26}$$

pri čemu je $r = 1.05$. Sređivanje ovog omjera (**3 boda**) vodi na jednadžbu trećeg reda za $x = (v/c)^2$,

$$r^2 x^3 + r(4-r)x^2 + 4(1-r)x = 0\,. \tag{27}$$

Razrada spomenutog sređivanja (svaka tri reda nose 1 bod):

$$
\begin{aligned}
&\frac{2c^2}{v^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}-1\right)=r\\
&x\equiv(v/c)^2\\
&\frac{2}{x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}-1\right)=r\\
&\frac{2}{x}\,\frac{1-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}=r\\
&rx\sqrt{1-x}=2-2\sqrt{1-x}\\
&(rx+2)\sqrt{1-x}=2\quad /^2\\
&(r^2x^2+4rx+4)(1-x)=4\\
&r^2x^2+4rx+4-r^2x^3-4rx^2-4x=4\\
&\text{konačno grupiranje vodi na izraz (27)}
\end{aligned}
\tag{28}
$$

Vidimo da možemo izlučiti x, što vodi rješenju $x=0$. To rješenje odbacujemo, budući da odgovara brzini $v=0$, a mi po uvjetima zadatka tražimo konačnu brzinu (**1 bod**, dovoljno je i nalaženje rješenja, bez obzira na odbacivanje). Preostala dva rješenja dana su kvadratnom jednadžbom

$$(r/2)^2x^2+r(1-r/4)x+(1-r)=0\,. \tag{29}$$

Rješenja su $x_1\approx-2.87$ i $x_2\approx0.06$. Prvo od ovih dvaju rješenja odbacujemo kao nefizikalno (odgovara $v>c$, **1 bod**), dok drugo vodi na $v\approx0.24\,c$ (**1 bod**).

b) Izraz za relativističku količinu gibanja je (**1 bod**)

$$p_R=\frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\,, \tag{30}$$

a za nerelativističku $p_{NR}=mv$, gdje su m i v masa i brzina objekta. Tražena relativna razlika stoga je jednaka (**1 bod**)

$$\delta r=\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}-1\,. \tag{31}$$

S druge strane, za satelit koji jednolikom brzinom kruži oko Marsa vrijedi jednakost gravitacijske i centripetalne sile (**1 bod**):

$$\frac{mv^2}{R_m}=\frac{GM_mm}{R_m^2}\,, \tag{32}$$

iz čega slijedi $v=\sqrt{GM_m/R_m}$. Ovdje smo iskoristili činjenicu da se nalazi blizu površine Marsa, dakle na udaljenosti približno jednakoj R_m od njegova centra mase. Ubacujući ovaj izraz za brzinu u (31), nalazimo da je (**1 bod**)

$$\delta r\approx7\times10^{-11}\,. \tag{33}$$