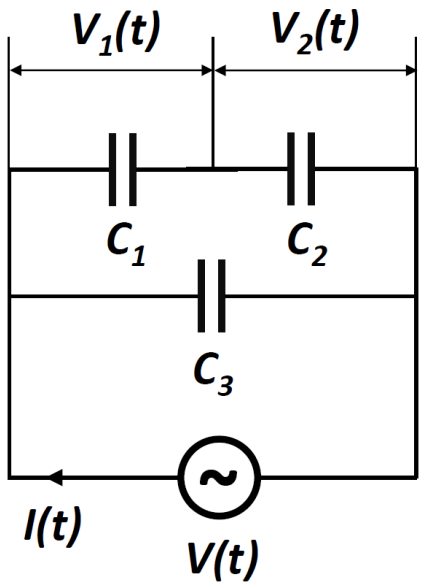
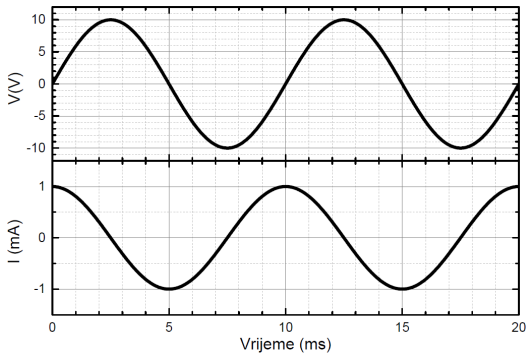
Zadaci za županijsko natjecanje 2020. – 3. skupina

Zadatak 1 (10 bodova)

Strujni krug je prikazan kao na slici i sastoji se od izvora izmjeničnog napona V i tri kondenzatora C_1, C_2, C_3. Na grafovima su dane vrijednosti struje $I(t)$ i napona na izvoru $V(t)$. Nađi vrijednost kapaciteta C_1, C_2, C_3, ako su naponi $V_1(t)$ i $V_2(t)$ jednaki, a samo jedan od tri kondenzatora ima dvaput veći kapacitet od (barem) jednog od preostalih.



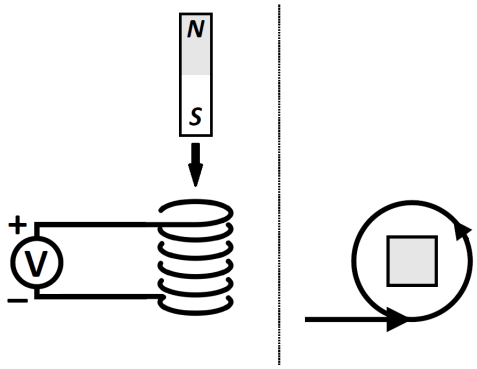


Zadatak 2 (8 bodova)

Transformator pretvara napon s američkog 120 V na europski standard 240 V. Kolika je iskoristivost (korisnost) transformatora ako je struja sekundara $I_2 = 12$ A, a struja na primaru $I_1 = 25$ A. Iskoristivost računamo kao omjer izlazne i ulazne snage. Koliko topline transformator generira kroz jednu minutu, ako pretpostavimo da se sva neiskorištena snaga troši na zagrijavanje?

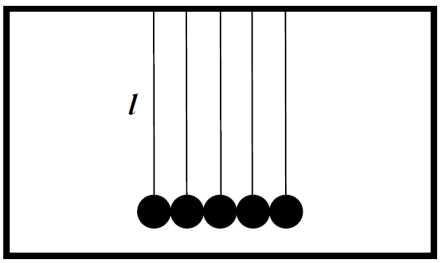
Zadatak 3 (12 bodova)

Magnet ulazi u zavojnicu i izlazi kroz drugu stranu tako da mu je južni pol prema dolje. Magnet cijelo vrijeme ima konstantnu brzinu gibanja. Zavojnica je namotana tako da, gledano od "gore" se žica kreće u smjeru suprotno od kazaljke na satu (slika). Skiciraj na grafu kako će ovisiti inducirani napon o vremenu kojeg vidi voltmetar V (obratiti pozornost na $+$ i $-$ polove voltmetra). Obrazloži odgovor! Hoće li graf biti simetričan s obzirom na neki specifični trenutak? Gdje će biti magnet u tom trenutku? Kakvo je asimptotsko ponašanje grafa (što kada je magnet jako daleko od zavojnice)?



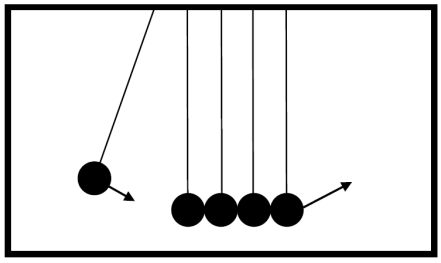
Zadatak 4 (10 bodova)

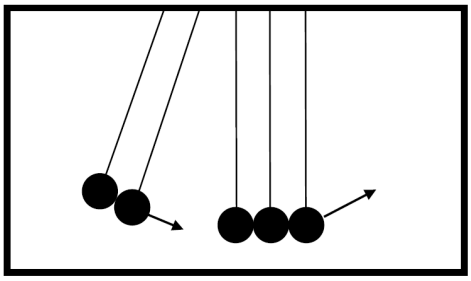
Newtonova kolijevka je zabavna igračka koja se sastoji od okvira na kojem visi 5 identičnih kuglica koje se međusobno dodiruju, kao na prvoj slici. Pomaknemo li lijevu kuglicu i pustimo, kuglica će udariti u drugu kuglicu, a krajnja desna kuglica će se tada odbiti i popeti na visinu na kojoj je prije bila prva kuglica. Period takve oscilacije kolijevke je $T = 1$ s.

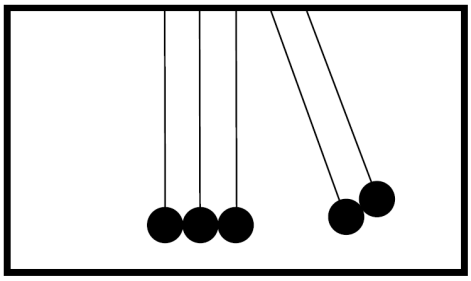


a) Nađi duljinu niti na kojoj mase vise.

b) Pomaknemo dvije kuglice s jedne strane i pustimo. Nakon sudara s ostalim kuglicama dvije kuglice miruju, a dvije s druge strane se odbiju. Pretpostavi da se kuglice odbiju s brzinama u_1 i u_2 te poveži te brzine s brzinom dvije početne kuglice v! Kolika će im tada biti frekvencija oscilacija?

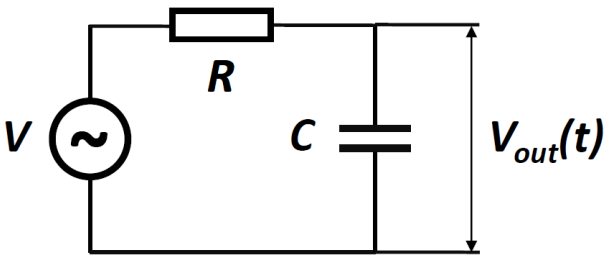






Zadatak 5 (10 bodova)

Jednostavni električni filtar je sklop koji ovisno o frekvenciji ulaznog napona V, daje izlazni napon $V_{out}(t)$ čija je amplituda usporediva, tj. puno manja od ulaznog napona. Za sklop na slici odredi da li odgovara niskofrekventnom filtru (amplituda izlaznog napona jako pada ako je frekvencija previsoka) ili visokofrekventnom filtru. Nađi izraz za amplitudu napona V_{out} u ovisnosti o frekvenciji. Za koju frekvenciju f je napon maksimalan? Nađi područje frekvencija za koje je $V_{out} \geq \frac{V_{max}}{\sqrt{2}}$, gdje je V_{max} amplituda ulaznog napona. Vrijednosti komponenti su $R = 1\ k\Omega$ i $C = 2$ nF.



VAŽNO:
Tijekom ispita ne smijete imati nikakav pisani materijal (knjige, bilježnice, formule...). Za pisanje koristite kemijsku olovku ili nalivpero. Pri ruci ne smijete imati mobitele ni druge elektroničke uređaje osim kalkulatora.

Zadaci za županijsko natjecanje 2020. – 3. skupina
Rješenja

Zadatak 1 (10 bodova)

Jednaki pad napona na kondenzatorima C_1 i C_2 implicira da ta dva kondenzatora imaju isti kapacitet, tj. $C_1 = C_2 = C_A$. **(2 boda)**

Iz zadatka znamo da jedan kondenzator ima dvaput veći kapacitet od nekog drugog, dakle $C_3 = 2C_A$. **(1 bod)**

Ukupni kapacitet je tada serijski spoj dva C_A kondenzatora: $C_x = \frac{C_A}{2}$ i paralelni spoj sa C_3:

$$C_{uk} = C_x + C_3 = \frac{C_A}{2} + 2C_A = \frac{5}{2}\,C_A$$

(2 boda)

Intenzitet napona i struje je povezan s impedancijom:

$$|Z| = \frac{|V|}{|I|}$$

Impedancija sustava kondenzatora je

$$Z = \frac{1}{\omega C}$$

gdje je $\omega = 2\pi f$ frekvencija koja se lako očita iz grafa. Jedan period traje $T = 10$ ms, što znači da je $f = 100$ Hz. **(2 boda)**

Omjer iznosa napona i struje je $|V|/|I| = 10^4$. Uvrštavajući sve brojeve dobijamo rezultat: $C_A = 64$ nF, odnosno $C_1 = C_2 = 64$ nF a $C_3 = 128$ nF. **(3 boda)**

Zadatak 2 (8 bodova)

Ulazni napon transformatora je $V_1 = 120$ V, a izlazni $V_2 = 240$ V. Vrijedi pravilo transformatora

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{I_2}{I_1}$$

(1 bod)

Struja primara je $I_1 = 25$ A. Po pravilu transformatora, struja koja se koristi za induciranje struje sekundara je $I_1^0 = 24$ A. Prema tome, 1 A struje na 120 V odlazi u toplinu. Snaga oslobođena je $P_Q = V_1 \cdot (I_1 - I_1^0) = 120$ W. **(3 boda)**

Korisna snaga je na sekundaru $P = V_2 \cdot I_2 = 2.88$ kW. Iskoristivost je stoga: $\eta = \frac{P}{P+Q} = 96\%$. **(2 boda)**

U jednoj minuti oslobodi se $Q = P_Q \cdot t = 7.2$ kJ topline. **(2 boda)**

Zadatak 3 (12 bodova)

Magnetska polje inducira struju u zavojnici preko Lenzovog pravila: na način da inducirana struja stvara magnetsko polje koje se protivi promjeni prvog polja. Izraz za inducirani napon (elektromotornu silu) dan je s:

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{\Delta B \cdot A}{\Delta t}$$

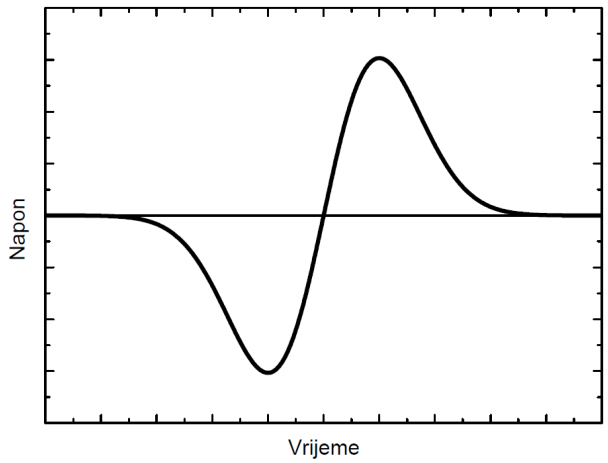
(1 bod)

Inducirani napon ovisi o promjeni magnetskog polja u vremenu (presjek A zavojnice ostaje isti. Budući da magnet "ulazi" prvo s južnim polom, silnice magnetskog polja unutar zavojnice gledaju prema "gore" (magnetu) i jačaju, pa će ih inducirana struja htjeti smanjiti. Kako bi se smanjile, struja mora poteći po pravilu desne ruke u smjeru kazaljke na satu. **(3 boda)**

Napon u $+$ konektoru voltmetra će biti negativniji od napona u $-$ konektoru. **(1 bod)**

Kada je magnet cijeli u zavojnici magnetsko polje neće više rasti, pa će napon pasti na nulu. Nakon toga magnetsko polje će slabiti tako da su silnice i dalje prema "gore", ali slabe. Zato će inducirana struja htjeti pojačati silnice, pa će napon u $+$ konektoru biti pozitivniji od napona u $-$ konektoru. **(bodovati graf)**

Prvi dio puta magneta će napon biti negativan, a drugi pozitivan. Oblik krivulje na grafu nije lako pronaći, ali znamo da neće biti konstanta (to bi značilo da se magnetsko polje uniformno mijenja), a neće biti ni pravac (to je u slučaju kvadratne ovisnosti magnetskog polja). Graf će otprilike izgledati kao na slici: **(5 bodova)**



Graf će biti simetričan oko točke kada je magnet u sredini zavojnice, jer se magnet giba jednoliko. Asimptote grafa će biti u nuli, jer kada je magnet daleko, magnetsko polje unutar zavojnice iščezava i ne mijenja se. **(2 boda)**

Zadatak 4 (10 bodova)

Zbog očuvanja količine gibanja, njihanje možemo razdvojiti u dva jednaka dijela – polovica gibanja uključuje lijevu kuglicu, a druga polovica gibanja uključuje desnu kuglicu. Budući da su obje kuglice identične, period gibanja je isti kao i kod običnog njihala duljine niti l. **(2 boda)**

Stoga je duljina niti određena periodom:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow l = \frac{T^2 g}{4\pi^2}$$

Duljina niti $l = 25$ cm. **(1 bod)**

Kako bi doznali brzinu kuglica u drugom dijelu zadatka, moramo iskoristiti zakon očuvanja količine gibanja i zakon očuvanja energije. **(1 bod)**

Masa jedne kuglice je m, i da nakon što 2 kuglice s brzinom v udare u ostale, druge dvije se odbiju s brzinama u_1 i u_2. Imamo dvije jednadžbe:

$$2mv = mu_1 + mu_2$$
$$\frac{1}{2}\,2mv^2 = \frac{1}{2}\,mu_1^2 + \frac{1}{2}\,mu_2^2$$

(2 boda)

Preslagivanjem jednadžbi dobijemo:

$$2v = u_1 + u_2$$
$$2v^2 = u_1^2 + u_2^2$$

Iz prve izrazimo $u_2 = 2v - u_1$ i uvrstimo u drugu:

$$2v^2 = u_1^2 + 4v^2 - 4vu_1 + u_1^2$$

Razmještajem i kraćenjem faktora 2 dobijemo:

$$u_1^2 - 2u_1 v + v^2 = 0 \Rightarrow (u_1 - v)^2 = 0$$

Rješenje je $u_1 = v$ i $u_2 = v$. **(2 boda)**

Budući da se svaka kuglica zasebno njiše na niti duljine l, frekvencija oscilacija im je nepromijenjena, dakle $f = 1$ Hz. **(2 boda)**

Zadatak 5 (10 bodova)

Ovaj sklop je niskofrekventni filtar. Do rješenja se može doći na nekoliko načina. Najjednostavnije je primjetiti da za istosmjernu struju izlazni napon je jednak ulaznom, što znači da ovaj krug propušta $f = 0$, samim time i niske frekvencije. **(2 boda)**

Napomena: točno se boduje i objašnjenje nakon provedenog računa, gdje se jasno pokaže koje frekvencije i u kojem intenzitetu filtar propušta.

Ukupna impedancija kruga je

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$$

(2 boda)

Napon na izlazu je jednak naponu na kondenzatoru i dan je s:

$$|V_{out}| = |V_C| = \frac{\frac{1}{\omega C}|V|}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} = \frac{|V|}{\sqrt{\omega^2 C^2 R^2 + 1}}$$

(2 boda)

Maksimalni napon nastaje u slučaju niske frekvencije($\omega \to 0$), kada kondenzator praktički predstavlja beskonačnu impedanciju. Tada je $V_{out} = V$. Postavljamo jednadžbu za određivanje rubne frekvencije:

$$\frac{1}{\sqrt{\omega^2 C^2 R^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Rješenje za frekvenciju je $f = \frac{1}{2\pi RC}$, pri čemu smo odbacili negativnu frekvenciju kao ne-fizikalnu. **(2 boda)**

Uz kapacitet $C = 2$ nF i otpor $R = 1$ kΩ, gornja frekvencija do koje filtar "propušta" frekvencije je $f = 79.6$ kHz. **(2 boda)**