Županijsko natjecanje iz fizike

- srednje škole: IV. grupa -

28.09.2020.

1. Pretpostavite da je elektron mala homogena kuglica naboja. Procijenite njegovu veličinu vođeni sljedećim uputama:

   - Prije svega, iz elektrostatike je dobro poznato da je potrebno obaviti određeni rad W da se izgradi homogeno nabijena kuglica naboja q i polumjera r. Jednostavnosti radi, pretpostavite da je taj rad jednak električnoj potencijalnoj energiji dva *točkasta* naboja q koji se nalaze na udaljenosti r.
   - Nakon što se dobili izraz za W, pretpostavite da je taj rad pohranjen kao energija mirovanja elektrona i, na temelju toga, odredite numeričku vrijednost za r. Dobivena vrijednost se naziva klasični polumjer elektrona.

   [7 bodova]

2. Dokažite da se kružnica u gibanju relativističkom brzinom v deformira u elipsu i nađite vezu između ekscentriciteta elipse ϵ i brzine gibanja kružnice.

   Podsjetnik: ekscentricitet elipse s velikom poluosi a i malom poluosi b je

   $$\epsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}.$$

   [11 bodova]

3. Faradayev rotator je uređaj koji se koristi za zakretanje ravnine polarizacije elektromagnetskih valova putem tzv. magneto-optičkog efekta. Rotator možemo zamisliti kao cilindar duljine ℓ u kojem postoji homogeno magnetsko polje B. Ako pustimo EM val kroz Faradayev rotator, tako da se val širi uzduž osi simetrije cilindra, pri izlasku iz rotatora doći će do zakretanja smjera polarizacije EM vala prema formuli

   $$\beta = \mathcal{V} B \ell,$$

   gdje je β kut zakreta (u radijanima), a $\mathcal{V}$ tzv. Verdeteova konstanta koja ovisi o materijalu unutar rotatora.

   Zamislite sad sljedeći eksperiment: Dva identična snopa svjetlosti putuju paralelno, tako da jedan prolazi kroz Faradayev rotator, a drugi pored njega. Nakon izlaska iz rotatora snopovi interferiraju. Odredite pri kojoj će najmanjoj vrijednosti magnetskog polja $B_{\min}$ doći do destruktivne interferencije među snopovima.

   Uzmite da je Faradayev rotator cilindar duljine $\ell = 10\,\mathrm{cm}$, te da je ispunjen materijalom Verdetove konstante $\mathcal{V} = 134\,\mathrm{rad/Tm}$.

   [8 bodova]

4. Tanki bakreni disk polumjera $R = 20\,\mathrm{cm}$ i zanemarive debljine izložen je sunčevom zračenju intenziteta $I = 1000\,\mathrm{W/m^2}$ koje upada okomito na disk. Pod pretpostavkom da je disk savršeno crno tijelo, odredite mu ravnotežnu temperaturu T_R nakon što je dovoljno dugo izložen suncu. Zanemarite sve druge izvore topline.

   Nakon što sunce zađe, disk se počinje hladiti. Pretpostavite da sunčevo zračenje trenutno nestane i procijenite za koliko će se vremena disk ohladiti za jedan stupanj.

   Masa diska je $m = 1\,\mathrm{kg}$, a specifični toplinski kapacitet bakra $c_\mathrm{Cu} = 375\,\mathrm{J/kgK}$.

[14 BODOVA]

5. Maleni predmet se nalazi točno na polovici između konveksnog zrcala polumjera $R = 15\,\mathrm{cm}$ i sabirne leće žarišne daljine $f = 10\,\mathrm{cm}$. Tjeme zrcala i leća nalaze se na udaljenosti $d = 10\,\mathrm{cm}$. Zbog prepreke koja je postavljena između predmeta i leće, slika predmeta se kroz leću vidi tek nakon što se zrake svjetlosti prvo reflektiraju od zrcala. Odredite položaj konačne slike, te utvrdite radi li se o realnoj ili virtualnoj slici.

[10 BODOVA]

Vrijednosti fizikalnih konstanti:

- brzina svjetlosti: $c = 3.00 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$;
- elementarni naboj: $e = 1.60 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$;
- masa elektrona: $m = 9.11 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$;
- permitivnost vakuuma: $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\,\mathrm{F/m}$;
- Stefan-Boltzmannova konstanta: $\sigma = 5.67 \times 10^{-8}\,\mathrm{Wm^{-2}K^{-4}}$.

VAŽNO: Tijekom ispita ne smijete imati nikakav pisani materijal (knjige, bilježnice, formule). Za pisanje, koristite kemijsku olovku ili nalivpero. Pri ruci ne smijete imati mobitele ni druge elektroničke uređaje osim kalkulatora.

Županijsko natjecanje iz fizike - rješenja

- srednje škole: IV. grupa -

28.09.2020.

Upute za bodovanje: Ovdje je prikazan jedan način rješavanja zadataka. Ako učenici riješe zadatak drugačijim, a fizikalno ispravnim načinom, treba im dati puni broj bodova predviđen za taj zadatak. Ako učenici ne napišu posebno svaki ovdje predviđeni korak, a vidljivo je da su ga napravili, treba im dati bodove kao da su ga napisali.

1. Prema uputi u zadatku, pretpostavljamo da je rad potreban da se stvori homogena kuglica naboja q i polumjera r jednak električnoj potencijalnog energiji dva točkasta naboja q, koja se nalaze na udaljenosti r. Prema tome, možemo odmah pisati

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r}, \qquad \text{[2 BODA]}$$

gdje je $q = e$ naboj elektrona, a r njegov polumjer koji pokušavamo odrediti. S druge strane, taj rad možemo interpretirati kao energiju mirovanja elektrona, odnosno

$$W = mc^2, \qquad \text{[2 BODA]}$$

gdje je m masa elektrona. Prema tome, lako je odrediti klasični polumjer elektrona

$$r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{mc^2} \qquad \text{[2 BODA]}$$

$$= 2.81 \times 10^{-15}\,\mathrm{m}. \qquad \text{[1 BOD]}$$

2. Promotrimo kružnicu

$$x^2 + y^2 = R^2. \qquad \text{[2 BODA]}$$

Dvije točke na kružnici, npr. $(-\sqrt{R^2 - y^2}, y)$ i $(+\sqrt{R^2 - y^2}, y)$ za neki $y \in [-R, +R]$ možemo shvatiti kao krajeve štapa koji se proteže paralelno osi x, na udaljenosti y od nje. Ako se sad cijela kružnica počne gibati u smjeru osi x relativitičkom brzinom v, štap će se kontrahirati, no i dalje će ostati na istoj udaljenosti od osi x. Prema tome, štap u gibanju će imati nove koordinate: $(-\sqrt{R^2 - y^2}/\gamma, y)$ i $(+\sqrt{R^2 - y^2}/\gamma, y)$, gdje je γ Lorentzov faktor. [3 BODA]

Prema tome, ako pogledamo sve moguće krajeve štapova, vidimo da oni opisuju krivulju

$$\gamma^2 x^2 + y^2 = R^2, \qquad \text{[2 BODA]}$$

što je jednadžba elipse

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \qquad \text{[2 BODA]}$$

s poluosima $a = R$ i $b = R/\gamma$. Prema tome, ekscentricitet elipse je

$$\epsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = \frac{v}{c}. \qquad \text{[2 BODA]}$$

3. Do destruktivne interferencije obično dolazi kad su dva koherentna vala jednakih polarizacija pomaknuta u hodu za neparan višekratnih polovica valnih duljina. Međutim, destruktivnu interferenciju možemo postići i okretanjem smjera polarizacije jednom valu. Tada će valovi, strogo gledano, i dalje biti u fazi, ali će im polarizacije biti suprotne te će se valovi u sumi poništiti. [3 BODA]

   To znači da će do destruktivne interferencije doći kad god je polarizacija vala koji prolazi kroz Faradayev rotator zakrenuta za neparan višekratnik broja π u odnosu na val koji ne prolazi kroz rotator. Drugim riječima, do prve destruktivne interferencije će doći za kut zakreta

$$\beta = \pi. \qquad \text{[2 BODA]}$$

   Za to nam je potrebno magnetsko polje

$$\begin{aligned} B_{\text{min}} &= \frac{\pi}{\mathcal{V}\ell} && \text{[2 BODA]} \\ &= 0.23\,\text{T}. && \text{[1 BOD]} \end{aligned}$$

4. Budući da sunce obasjava samo jednu stranu diska, upadna snaga sunčevog zračenja koju disk apsorbira je

$$P_{\mathrm{up}} = IR^2\pi, \qquad \text{[2 BODA]}$$

gdje je R polumjer diska. S druge strane, disk zrači snagu kroz sve plohe, tj. dvije baze i oplošje. Kako se radi o tankom disku, oplošje je zanemarivo, pa je snaga koju disk zrači

$$P_{\mathrm{zr}} = 2R^2\pi\sigma T^4, \qquad \text{[2 BODA]}$$

gdje je T temperatura diska. U termodinamičkoj ravnoteži ove dvije snage moraju biti iste, pa lako izračunamo ravnotežnu temperaturu

$$T_{\mathrm{R}} = \left(\frac{I}{2\sigma}\right)^{1/4} \qquad \text{[2 BODA]}$$

$$= 306\,\mathrm{K} = 33\,^{\circ}\mathrm{C}. \qquad \text{[2 BODA]}$$

Kad nestane sunčevog zračenja, disk i dalje zrači kao crno tijelo, što znači da gubi energiju. U malenom vremenskom intervalu Δt disk izgubi energiju $\Delta E = -P_{\mathrm{zr}}\Delta t$, odnosno promijeni mu se temperatura za $\Delta T = \Delta E/(mc_{\mathrm{Cu}})$. Drugim riječima, jednadžba koja opisuje gubitak temperature je

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = -\frac{2R^2\pi\sigma}{mc_{\mathrm{Cu}}}T^4. \qquad \text{[3 BODA]}$$

Ova se jednadžba može riješiti integracijom, odakle se dobije da je vrijeme t potrebno da se disk ohladi s temperature T na temperaturu T' dano izrazom

$$t = \frac{mc_{\mathrm{Cu}}}{6R^2\pi\sigma}\left(\frac{1}{T'^3} - \frac{1}{T^3}\right). \qquad \text{[2 BODA]}$$

Odavde je vrijeme potrebno da se disk u početku ohladi za jedan stupanj

$$t = 3.02\,\mathrm{s}. \qquad \text{[1 BOD]}$$

NAPOMENA: od učenika se ne očekuje znanje integrala, već kreativnost prilikom procjene potrebnog vremena. Npr. vrijeme t se može dobro aproksimirati pretpostavkom da je snaga zračenja konstantna i odgovara početnoj (ravnotežnoj) temperaturi

$$t_1 \approx \frac{mc_{\mathrm{Cu}}}{2R^2\pi\sigma}\frac{1\,\mathrm{K}}{(306\,\mathrm{K})^4} = 3.00\,\mathrm{s}.$$

Bilo koja druga smislena aproksimacija koji vodi na rezultat koji se numerički slaže s točnim rezultatom unutar 10% treba bodovati svim bodovima.

5. Neka se predmet nalazi na udaljenosti $x > 0$ od tjemena zrcala. Tada će slika koju daje konveksno zrcalo biti na udaljenosti y koju određujemo iz jednadžbe konveksnog zrcala

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -\frac{2}{R}, \qquad [1 \text{ BOD}]$$

odakle slijedi

$$y = -\frac{Rx}{R + 2x}. \qquad [2 \text{ BODA}]$$

Negativna vrijednost za y znači da je slika virtualna i da se nalazi iza zrcala. Ta slika postaje predmet za leću koji se nalazi na udaljenosti

$$x' = d - y \qquad [2 \text{ BODA}]$$

od leće. Prema tome, jednadžba leće

$$\frac{1}{x'} + \frac{1}{y'} = \frac{1}{f} \qquad [1 \text{ BOD}]$$

daje položaj konačne slike

$$y' = \frac{fx'}{x' - f} = f\frac{d(R + 2x) + Rx}{(d - f)(R + 2x) + Rx}. \qquad [2 \text{ BODA}]$$

U našem je slučaju $x = d/2$, $f = d$ pa se gornji rezultat pojednostavi na

$$y' = \frac{(3R + 2d)d}{R} = 43\,\text{cm}. \qquad [2 \text{ BODA}]$$

Budući da je slika izvan fokusa, ona je realna.