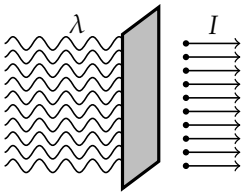
Županijsko natjecanje iz fizike

- srednje škole: IV. grupa -

25.02.2016.

1. Da biste ispitali fizikalna svojstva tanke pločice načinjene od nekog egzotičnog metala, obasjate je elektromagnetskim zračenjem valne duljine $\lambda = 3\,\text{pm}$. Nakon što u pločici dođe do fotoefekta, struja elektrona jakosti $I = 1\,\text{mA}$ izleti s druge strane pločice, kao na slici.



Izbačeni elektroni potom upadaju okomito na obližnji zid te, prilikom savršeno neelastičnog sudara sa zidom, djeluju na njega silom $F = 2.5\,\mu\text{N}$.

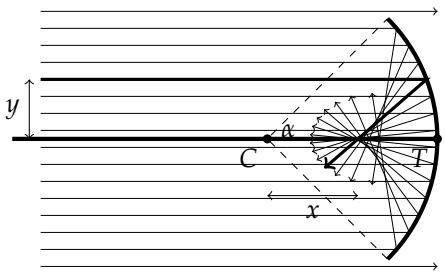
- Odredite brzinu v kojom se izbačeni elektroni gibaju prije nego što udare u zid.
- Umjesto da pustimo elektrone da udaraju u zid, želimo ih usporiti električnim poljem. Pri kojoj će se razlici potencijala U elektroni usporiti do zaustavljanja?
- Koliko iznosi izlazni rad ovog metala?

[11 bodova]

2. Odredite valnu duljinu λ monokromatske svjetlosti koja upada okomito na difrakcijsku rešetku konstante $d = 2.2\,\mu\text{m}$ ako je drugi difrakcijski maksimum otklonjen za kut $\Delta\theta = 15°$ u odnosu na prvi maksimum. Koliko se ukupno difrakcijskih maksimuma može opaziti? Pri kojim se kutovima opažaju ovi maksimumi? Središnji maksimum brojite kao nulti.

[8 bodova]

3. Snop zraka svjetlosti upada paralelno optičkoj osi na sferno zrcalo središnjeg kuta $\alpha = 90°$ i polumjera zakrivljenosti $R = 20\,\text{cm}$ kako je prikazano na slici.



Za razliku od uskih snopova kod kojih se sve paralelne zrake koje upadaju na sferno zrcalo odbijaju tako da prolaze kroz istu točku na optičkog osi, žarište, reflektirane zrake paralelnog snopa proizvoljne širine neće sjeći optičku os u jednoj točki. Ta se pojava naziva sferna aberacija.

- Odredite na kojoj će udaljenosti od središta zakrivljenosti x reflektirana zraka sjeći optičku os ako se prilikom upada nalazila na udaljenosti y od optičke osi.
- Nađite područje na optičkoj osi $x \in [x_{\text{min}}, x_{\text{max}}]$ unutar kojeg prolaze sve reflektirane zrake.

[10 bodova]

4. Pikulu mase $m = 20\,\mathrm{g}$ želite čim preciznije ispustiti s vrha zgrade visine $H = 25\,\mathrm{m}$ na metu koja je označena na tlu. Koliko vam kvantna fizika u tome odmaže? Prema Heisenbergovom načelu neodređenosti, pikula ne može istovremeno imati točno određen položaj i količinu gibanja, što otežava precizno ciljanje. Jednostavnosti radi, uzmite da su kvantni efekti bitni jedino u horizontalnom (x) smjeru, i u potpunosti ih zanemarite u vertikalnom (y) smjeru. Pretpostavite, drugim riječima, da se horizontalan položaj pikule x_0 u trenutku ispuštanja ($t = 0$) nalazio negdje unutar intervala $x_0 \in [-\Delta x, +\Delta x]$, dok je početna količina gibanja p_0 također bila neodređena: $p_0 \in [-\Delta p, +\Delta p]$, a početne neodređenosti Δx i Δp su zadovoljavale Heisenbergovu relaciju

$$\Delta x \Delta p = \frac{h}{4\pi}.$$

   - Neka je $\delta x(t)$ neodređenost u horizontalnom položaju pikule tijekom slobodnog pada, tako da vrijedi $\delta x(0) = \Delta x$. Odredite $\delta x(t)$ kao funkciju vremena i pokažite da se $\delta x(t)$ može prikazati u obliku koji ne sadrži Δp.
   - Izračunajte nakon kojeg će vremena τ pikula pasti na tlo.
   - Da bi pikula najtočnije pogodila metu, njena horizontalna neodređenost u trenutku pada $\delta x(\tau)$ mora biti minimalna. Kolika mora biti početna neodređenost Δx, da bi konačna neodređenost $\delta x(\tau)$ bila najmanja moguća? Koliko, u tom slučaju, iznosi $\delta x(\tau)$?

   Prilikom računa pretpostavite da je pikula materijalna točka te zanemarite utjecaj otpora zraka i rotacije Zemlje na vertikalno gibanje pikule.

[12 BODOVA]

5. Pozitronij je „atom" sastavljen od elektrona i njegove antičestice (ista masa, no suprotni naboj), pozitrona.[1]

   - Pretpostavite da se elektron i pozitron unutar pozitronija gibaju istom nerelativističkom brzinom konstantnog iznosa v te skicirajte njihove putanje u sustavu centra mase.
   - Nađite kako veličina pozitronija (udaljenost između elektrona i pozitrona) D ovisi o v.
   - Odredite ukupnu energiju pozitrona E kao funkciju od D.
   - Izračunajte ukupni zamah pozitronija L.
   - Pretpostavite, baš poput Bohra, da je zamah kvantiziran, $L = nh/(2\pi)$, gdje je $n \in \mathbb{N}$, te izračunajte ionizacijsku energiju pozitronija (u eV-ima), kao i njegovu veličinu u osnovnom stanju.

[9 BODOVA]

Vrijednosti fizikalnih konstanti:

- ubrzanje sile teže: $g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$;
- brzina svjetlosti: $c = 3.00 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$;
- Planckova konstanta $h = 6.63 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$;
- masa elektrona: $m = 9.11 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$;
- elementarni naboj: $e = 1.60 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$;
- permitivnost vakuuma: $\epsilon_0 \equiv 1/(4\pi k_e) = 8.85 \times 10^{-12}\,\mathrm{F/m}$, gdje je k_e Coulombova konstanta.

[1] Nije na odmet napomenuti da je pozitronij prvi predvidio hrvatski znanstvenik Stjepan Mohorovičić 1934.

Županijsko natjecanje iz fizike - rješenja

- srednje škole: IV. grupa -

25.02.2016.

Upute za bodovanje: Ovdje je prikazan jedan način rješavanja zadataka. Ako učenici riješe zadatak drugačijim, a fizikalno ispravnim načinom, treba im dati puni broj bodova predviđen za taj zadatak. Ako učenici ne napišu posebno svaki ovdje predviđeni korak, a vidljivo je da su ga napravili, treba im dati bodove kao da su ga napisali.

1. • Budući da se svi elektroni sudaraju savršeno neelastično sa zidom, oni mu predaju svu svoju količinu gibanja. Stoga silu na zid možemo prikazati u obliku

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = p_1 \frac{\Delta N}{\Delta t}, \qquad \text{[1 bod]}$$

gdje je p_1 količina gibanja pojedinog elektrona prije sudara, a $\Delta N/\Delta t$ broj elektrona koji se sudaraju sa zidom u jedinici vremena. Ti su elektroni u vremenu Δt prenjeli zidu naboj

$$\Delta Q = e\Delta N, \qquad \text{[1 bod]}$$

što znači da se broj sudara elektrona sa zidom u jedinici vremena može prikazati preko jakosti struje tih elektrona

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{1}{e}\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{I}{e}, \qquad \text{[1 bod]}$$

gdje je $I = \Delta Q/\Delta t$ količina prenesenog naboja u jedinici vremena, odnosno jakost struje elektrona. Kombinacijom gornjih relacija možemo izraziti količinu gibanja pojedinačnih elektrona preko zadanih veličina

$$p_1 = \frac{eF}{I}. \qquad \text{[1 bod]}$$

Uvrštavanje nerelativističkog izraza $p_1 = mv$ vodi na brzinu elektrona koja je veća od brzine svjetlosti, što znači da moramo koristiti izraz za relativističku količinu gibanja $p_1 = \gamma mv$, odakle, nakon sređivanja izraza, imamo

$$v = \frac{\frac{eF}{mI}}{\sqrt{1 + \left(\frac{eF}{mcI}\right)^2}} \qquad \text{[2 boda]}$$

$$= 2.48 \times 10^8\,\mathrm{m/s}. \qquad \text{[1 bod]}$$

• Da bismo usporili elektrone u električnom polju, potrebno je nametnuti takvu razliku potencijala koja će u potpunosti poništiti kinetičku energiju elektrona. Prema tome, mora vrijediti

$$U = \frac{E_\mathrm{k}}{e} = \frac{(\gamma - 1)mc^2}{e} \qquad \text{[1 bod]}$$

$$= 3.96 \times 10^5\,\mathrm{V}, \qquad \text{[1 bod]}$$

gdje smo relativistički faktor $\gamma = 1.77$ odredili iz prethodno izračunate brzine.

• Za kraj, izlazni rad ovog metala je

$$W = E_\mathrm{fot} - E_\mathrm{k} = \frac{hc}{\lambda} - (\gamma - 1)mc^2 \qquad \text{[1 bod]}$$

$$= 2.95 \times 10^{-15}\,\mathrm{J}. \qquad \text{[1 bod]}$$

2. Prva dva difrakcijska maksimuma su određena relacijama

$$d \sin\theta_1 = \lambda \quad \& \quad d \sin\theta_2 = 2\lambda$$

Ukoliko podijelimo te dvije relacije i pišemo $\theta_2 = \theta_1 + \Delta\theta$, dolazimo do jednadžbe

$$\sin(\theta_1 + \Delta\theta) = 2\sin\theta_1 \quad \rightsquigarrow \quad \operatorname{tg}\theta_1 = \frac{\sin\Delta\theta}{2 - \cos\Delta\theta}, \qquad [1 \text{ BOD}]$$

gdje smo koristili adicijske formule za sinus. Sad je lako odrediti valnu duljinu svjetlosti

$$\lambda = d\sin\theta_1 = d\frac{\operatorname{tg}\theta_1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta_1}} = \frac{d\sin\Delta\theta}{\sqrt{5-4\cos\Delta\theta}} \qquad [1 \text{ BOD}]$$

$$= 0.534\,\mu\text{m}. \qquad [1 \text{ BOD}]$$

Poznavajući valnu duljinu svjetlosti, lako je odrediti broj difrakcijskih maksimuma (ne uključujući središnji)

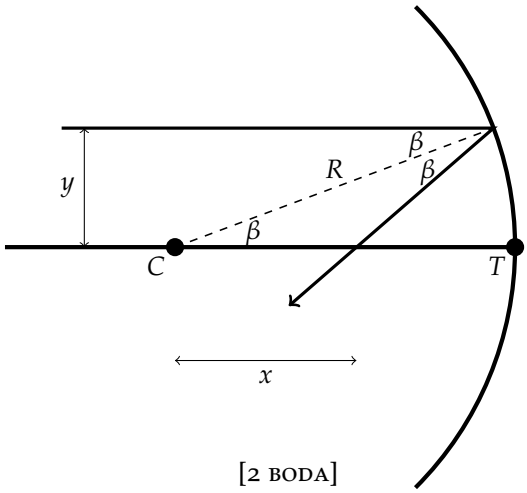
$$n = \left\lfloor \frac{d}{\lambda} \right\rfloor = 4. \qquad [1 \text{ BOD}]$$

Njihovi su kutni položaji dani relacijom $\theta_m = \arcsin(m\lambda/d)$. Uvrštavanjem dobivamo

$$\theta_1 = 14.05°, \quad \theta_2 = 29.05°, \quad \theta_3 = 46.75°, \quad \theta_4 = 76.22°. \qquad [4 \text{ BODA}]$$

Ukoliko je učenik promatrao maksimume s obje strane od središnjeg te tako dobio dvostruko veći broj maksimuma, priznati sve bodove.

3. • Skicirajmo detaljnije zraku koja upada paralelno optičkoj osi na udaljenosti y.



[2 BODA]

Upadni (i izlazni) kut β mora biti jednak kutu kojeg crtkana normala zatvara s optičkom osi. Prema tome, možemo pisati

$$\sin\beta = \frac{y}{R}, \qquad [2 \text{ BODA}]$$

kao i

$$\cos\beta = \frac{R/2}{x}. \qquad [2 \text{ BODA}]$$

Eliminacijom kuta β iz gornjih jednadžbi, dobivamo traženu ovisnost

$$x = \frac{R^2}{2\sqrt{R^2 - y^2}}. \qquad [1 \text{ BOD}]$$

• Uzimajući u obzir da je središnji kut zrcala $\alpha = 90°$, slijedi da na zrcalo upadaju sve zrake na udaljenosti

$$y \in [0, R\sin 45°] = [0, R/\sqrt{2}] \qquad [1 \text{ BOD}]$$

od optičke osi. Pripadne reflektirane zrake će sjeći optičku os na udaljenosti

$$x \in [R/2, R/\sqrt{2}] \qquad [1 \text{ BOD}]$$
$$= [10\,\text{cm}, 14.14\,\text{cm}]. \qquad [1 \text{ BOD}]$$

od središta zakrivljenosti.

4. • Kako na pikulu ne djeluje sila u horizontalnom smjeru, gibat će se konstantnom brzinom, tako da će vremenska ovisnost horizontalnog položaja biti

$$x(t) = x_0 + v_0 t, \qquad [1 \text{ BOD}]$$

gdje je $v_0 = p_0/m$ početna horizontalna brzina pikule. Budući da su kvantni efekti mali, ne očekujemo relativističke brzine, stoga smo koristili relaciju $p = mv$. Nadalje, pošto ne znamo niti x_0 niti v_0, ne možemo odrediti $x(t)$, no možemo dati interval unutar kojeg se horizontalni položaj čestice mora nalaziti,

$$x(t) \in [-\delta x(t), +\delta x(t)]. \qquad [1 \text{ BOD}]$$

Taj ćemo interval odrediti pomoću „najgoreg mogućeg" slučaja kad se pikula nalazi na rubu početnog intervala $x_0 = \pm\Delta x$, te giba maksimalnom brzinom usmjerenom tako da izlazi iz početnog intervala $v_0 = \pm\Delta p/m$. Sad je jasno da će se interval u kojem se pikula nalazi linearno povećavati u vremenu

$$\pm\delta x(t) = \pm\Delta x \pm \frac{\Delta p}{m} t. \qquad [1 \text{ BOD}]$$

Koristeći relaciju neodređenosti, možemo izraziti Δp preko Δx

$$\Delta p = \frac{h}{4\pi\Delta x}, \qquad [1 \text{ BOD}]$$

čime prethodna relacija postaje

$$\delta x(t) = \Delta x + \frac{ht}{4\pi m}\frac{1}{\Delta x}. \qquad [1 \text{ BOD}]$$

• Vrijeme τ potrebno da pikula padne na tlo računamo uzimajući u obzir da je slobodni pad jednoliko ubrzano gibanje te vrijedi

$$H = \frac{1}{2} g\tau^2, \qquad [1 \text{ BOD}]$$

gdje smo uzeli u obzir da je pikula ispuštena, dakle nije imala početnu vertikalnu brzinu. Odavde imamo

$$\tau = \sqrt{\frac{2H}{g}} = 2.26\,\text{s}. \qquad [1 \text{ BOD}]$$

• Horizontalna neodređenost u trenutku pada je sad

$$\begin{aligned} \delta x(\tau) &= \Delta x + \frac{h\tau}{4\pi m}\frac{1}{\Delta x} && [1 \text{ BOD}] \\ &= \left(\sqrt{\Delta x} - \sqrt{\frac{h\tau}{4\pi m}}\frac{1}{\sqrt{\Delta x}}\right)^2 + \sqrt{\frac{h\tau}{\pi m}}. \end{aligned}$$

U posljednjem smo izrazu prikazali $\delta x(\tau)$ kao sumu dva nenegativna doprinosa. Ukoliko želimo minimizirati taj izraz, moramo posebno minimizirati svaki od ta dva doprinosa. Drugi je doprinos konstantan, a prvi je minimalan kad je jednak nuli, odnosno kad vrijedi

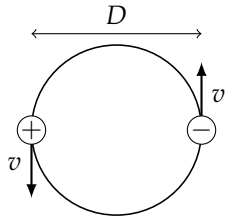
$$\begin{aligned} \Delta x = \Delta x_{\min} &= \sqrt{\frac{h\tau}{4\pi m}} && [1 \text{ BOD}] \\ &= 7.72 \times 10^{-17}\,\text{m}. && [1 \text{ BOD}] \end{aligned}$$

Minimalna će vrijednost $\delta x(\tau)$ tad biti

$$\begin{aligned} \delta x(\tau)_{\min} &= \sqrt{\frac{h\tau}{\pi m}} && [1 \text{ BOD}] \\ &= 1.54 \times 10^{-16}\,\text{m}. && [1 \text{ BOD}] \end{aligned}$$

Dakle, kvantni efekti su potpuno zanemarivi u slučaju slobodnog pada pikule.

5. • Jedini način da se elektron i pozitron gibaju istom brzinom stalnog iznosa pod utjecajem elektrostatske privlačne sile jest da se gibaju po kružnici kao što je prikazano na donjoj slici.



[1 BOD]

• Prilikom gibanja po kružnici polumjera $D/2$ elektrostatska privlačna sila igra ulogu centripetalne sile,

$$\frac{mv^2}{D/2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{D^2} \equiv k_e\frac{e^2}{D^2} \quad \rightsquigarrow \quad D = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{2mv^2} \equiv k_e\frac{e^2}{2mv^2}. \qquad \text{[2 BODA]}$$

• Ukupna se energija sastoji od kinetičke i potencijalne energije

$$E = 2\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{D} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{2D} \equiv -k_e\frac{e^2}{2D}, \qquad \text{[1 BOD]}$$

gdje smo brzinu v eliminirali u korist udaljenosti D.

• Ukupni je zamah

$$L = 2mv\frac{D}{2} = mvD. \qquad \text{[1 BOD]}$$

• Uvrštavajući $v = (nh)/(2\pi mD)$ u relaciju koja povezuje brzinu v i veličinu atoma D, lako nalazimo dopuštene vrijednosti veličine pozitronija

$$D_n = n^2\frac{2\epsilon_0 h^2}{\pi me^2} \equiv n^2\frac{h^2}{2\pi^2 k_e me^2}, \qquad \text{[1 BOD]}$$

odakle lako nalazimo veličinu pozitronija u osnovnom stanju

$$D_1 = 1.06 \times 10^{-10}\,\text{m}. \qquad \text{[1 BOD]}$$

Dopuštene su energije pozitronija

$$E_n = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{2D_n} = -\frac{1}{n^2}\frac{me^4}{16\epsilon_0^2 h^2} \equiv -\frac{1}{n^2}\frac{\pi^2 k_e^2 me^4}{h^2}. \qquad \text{[1 BOD]}$$

Energija ionizacije pozitronija je stoga

$$E_{\text{ion}} = -E_1 = 6.77\,\text{eV}. \qquad \text{[1 BOD]}$$

Radi lakšeg ispravljanja, konačni su rezultati su zapisani i pomoću ϵ_0 i pomoću k_e.