Općinsko natjecanje iz fizike

- srednje škole: IV. grupa -

29.01.2018.

1. Tri automobila, A, B i C voze jedan iza drugog konstantnim brzinama relativističkog iznosa. Vozač posljednjeg automobila u nizu A kaže da se automobil B, ispred njega, giba brzinom $c/2$. Vozač automobila B pak tvrdi da se automobil C, ispred njega, giba brzinom $c/2$. Odredite brzine automobila B i C kako ih vidi mirujući pješak P za kojeg se automobil A giba brzinom $c/2$.

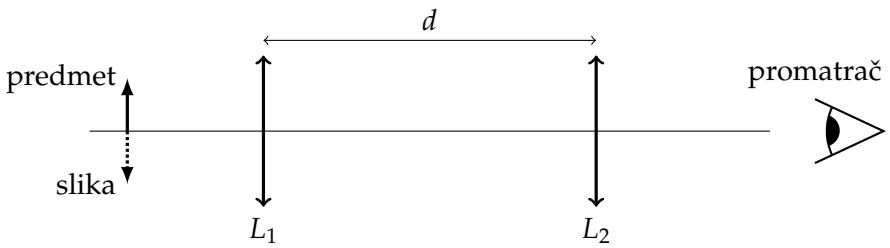
[9 bodova]

2. Preteča modernih akceleratora čestica je tzv. betatron koji, na principu elektromagnetske indukcije, ubrzava elektrone (beta čestice) u kružnim putanjama. Jednom kad elektroni dosegnu traženu brzinu, uspostavi se homogeno magnetsko polje koje ih održava u stabilnoj kružnoj putanji. Pretpostavite da je polumjer te putanje $R = 50\,\mathrm{cm}$ te da se elektroni gibaju brzinom $v = 0.99c$.

   - Odredite vrijeme T potrebno da elektron jednom obiđe svoju kružnu putanju, mjereno iz laboratorijskog sustava.
   - Koliko će to vrijeme τ iznositi za opažača u referentnom sustavu elektrona?
   - Kolika je centripetalna sila F potrebna da elektron drži u ovakvoj kružnoj orbiti?
   - Kolika mora biti jakost homogenog magnetskog polja B, usmjerenog okomito na ravninu gibanja elektrona, koje je izvor centripetalne sile?

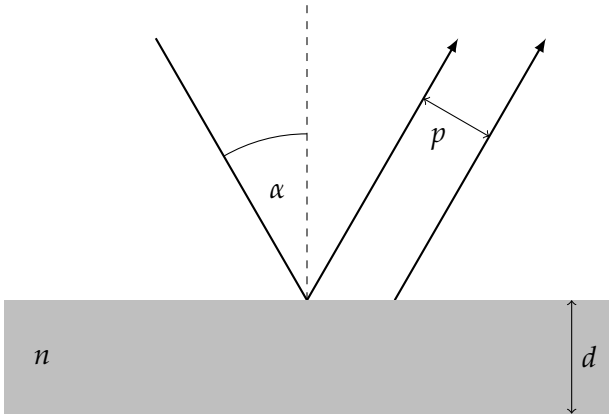
[11 bodova]

3. Predmet, dvije tanke konvergentne leće, L_1 i L_2, i promatrač nalaze se na optičkoj osi poredani kao na slici. Udaljenost između leća iznosi $d = 12\,\mathrm{cm}$, a predmet se nalazi u žarištu leće L_2. Pod tim uvjetima promatrač vidi obrnutu i virtualnu sliku predmeta iste veličine, na istom mjestu kao i predmet. Iz ovih podataka odredite žarišne duljine leća f_1 i f_2.



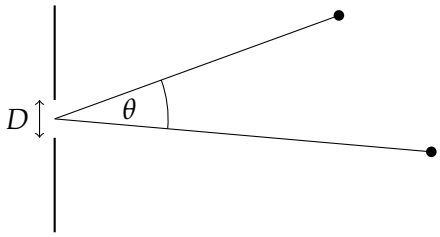
[12 bodova]

4. Zraka svjetlosti upada pod kutom α, u odnosu na okomicu, na tanki sloj sapunice debljine d i indeksa loma n. Kao rezultat refleksije nastaju dvije zrake, kao na slici, te se mjeri kako pomak p među zrakama ovisi o upadnom kutu α. Mjerenjem je ustanovljeno da vrijedi $p(\alpha = 10°) = 115\,\mathrm{nm}$ i $p(\alpha = 20°) = 220\,\mathrm{nm}$. Izračunajte indeks loma i debljinu sapunice.



[10 BODOVA]

5. Svi optički sustavi imaju granice preciznosti zbog efekata poput ogiba koji dovodi do zamućenja slike. Tako, npr. optički sustav koji ima otvor promjera D može razlučiti dva objekta ako oni, iz perspektive tog optičkog sustava, zatvaraju kut $\theta \geq 1.22\lambda/D$, gdje je λ valna duljina promatrane svjetlosti. S koje će udaljenosti d ljudsko oko promjera $D = 4\,\mathrm{mm}$ moći razlučiti dva svjetla na automobilu koja su razmaknuta za $\ell = 1.3\,\mathrm{m}$ i uperena prema oku? Koristite aproksimaciju malih kutova i uzmite da je srednja valna duljina svjetlosti $\lambda = 550\,\mathrm{nm}$.



[8 BODOVA]

Vrijednosti fizikalnih konstanti:

- brzina svjetlosti: $c = 3 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$;
- masa elektrona: $m = 9.11 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$;
- elementarni naboj: $e = 1.60 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$.

VAŽNO: Tijekom ispita ne smijete imati nikakav pisani materijal (knjige, bilježnice, formule). Za pisanje, koristite kemijsku olovku ili nalivpero. Pri ruci ne smijete imati mobitele ni druge elektroničke uređaje osim kalkulatora.

Općinsko natjecanje iz fizike - rješenja

- srednje škole: IV. grupa -

29.01.2018.

Upute za bodovanje: Ovdje je prikazan jedan način rješavanja zadataka. Ako učenici riješe zadatak drugačijim, a fizikalno ispravnim načinom, treba im dati puni broj bodova predviđen za taj zadatak. Ako učenici ne napišu posebno svaki ovdje predviđeni korak, a vidljivo je da su ga napravili, treba im dati bodove kao da su ga napisali.

1. Uvedimo oznaku $v_{X,Y}$ za brzinu X-a, kako ga vidi Y. Po uvjetu zadatka, imamo $v_{A,P} = v_{B,A} = v_{C,B} = c/2$, a zanimaju nas brzine $v_{B,P}$ i $v_{C,P}$. Koristeći formulu za relativističko zbrajanje brzina, odmah možemo odrediti $v_{B,P}$

$$\begin{aligned} v_{B,P} &= \frac{v_{B,A} + v_{A,P}}{1 + v_{B,A}v_{A,P}/c^2} && \text{[2 boda]} \\ &= \frac{4}{5}c && \text{[1 bod]} \\ &= 2.40 \times 10^8\,\mathrm{m/s}. && \text{[1 bod]} \end{aligned}$$

Da bismo odredili $v_{C,P}$, prvo moramo odrediti $v_{C,A}$ prema formuli

$$v_{C,A} = \frac{v_{C,B} + v_{B,A}}{1 + v_{C,B}v_{B,C}/c^2} = \frac{4}{5}c. \qquad \text{[2 boda]}$$

Zatim možemo izračunati $v_{C,P}$

$$\begin{aligned} v_{C,P} &= \frac{v_{C,A} + v_{A,P}}{1 + v_{C,A}v_{A,P}/c^2} = \frac{13}{14}c && \text{[2 boda]} \\ &= 2.79 \times 10^8\,\mathrm{m/s}. && \text{[1 bod]} \end{aligned}$$

2. • Vrijeme potrebno da elektron jednom obiđe svoju putanju (mjereno u laboratorijskom sustavu) je naprosto prevaljeni put podijeljen sa brzinom

$$T = \frac{2R\pi}{v} \qquad [1 \text{ BOD}]$$
$$= 1.06 \times 10^{-8}\,\text{s}. \qquad [1 \text{ BOD}]$$

• Iako referentni sustav elektrona nije inercijalan, zbog toga što je brzina elektrona u odnosu na laboratorij konstantna po iznosu, vremena u ta dva sustava će biti povezana relativističkim faktorom $\gamma = (1 - (v/c)^2)^{-1/2}$. Drugim riječima, vremena τ i T bit će povezana formulom za dilataciju vremena

$$\tau = \frac{T}{\gamma} \qquad [1 \text{ BOD}]$$
$$= 1.49 \times 10^{-9}\,\text{s}. \qquad [1 \text{ BOD}]$$

• Da bismo odredili centripetalnu silu, moramo se vratiti na definiciju sile kao promjene količine gibanja, $\vec{F} = \Delta\vec{p}/\Delta t$. U slučaju relativističkih brzina, količina gibanja je dana formulom $\vec{p} = \gamma m\vec{v}$. Budući da je iznos brzine v konstantan prilikom gibanja, onda je i faktor γ također konstantan pa izraz za silu postaje $\vec{F} = \gamma m\Delta\vec{v}/\Delta t$. Međutim, za kružna gibanja, promjena brzine $\Delta\vec{v}/\Delta t$ je, po iznosu, ništa drugo nego centripetalna akceleracija v^2/R. Stoga imamo

$$F = \frac{\gamma m v^2}{R} \qquad [3 \text{ BODA}]$$
$$= 1.14 \times 10^{-12}\,\text{N}. \qquad [1 \text{ BOD}]$$

• Ako se nabijena čestica naboja q giba brzinom v u magnetskom polju B koje je okomito na brzinu, tada na česticu djeluje Lorentzova sila $F = qvB$ koja je usmjerena prema pravilu desne ruke. Ovaj izraz za Lorentzovu silu vrijedi i za relativističke brzine. Prema tome, da bi se elektron naboja $q = e$ držao u spomenutoj kružnoj putanji, potrebno je magnetsko polje

$$B = \frac{F}{ev} = \frac{\gamma m v}{eR} \qquad [2 \text{ BODA}]$$
$$= 2.40 \times 10^{-2}\,\text{T}. \qquad [1 \text{ BOD}]$$

3. Konvergentne leće zadovoljavaju jednadžbu $1/a + 1/b = 1/f$, gdje je a udaljenost predmeta od leće, b udaljenost slike od leće, a $f > 0$ žarišna duljina leće. Budući da promatrač vidi sliku predmeta kroz leću L_2, a znamo da je slika virtualna i da se nalazi u žarištu leće L_2, možemo zaključiti da vrijedi

$$b_2 = -f_2, \qquad [1 \text{ BOD}]$$

gdje smo odabrali negativan predznak jer je slika virtualna. Odavde, koristeći jednadžbu leće, odmah imamo i udaljenost predmeta (za leću L_2)

$$a_2 = \frac{f_2}{2}. \qquad [1 \text{ BOD}]$$

Predmet za leću L_2 je slika pravog predmeta koju čini leća L_1. Pa kako je predmet za L_2 obrnut u odnosu na pravi predmet, to znači i da je slika leće L_1 obrnuta, odnosno, realna i nalazi se s desne strane L_1. Drugim riječima, slika za L_1, tj. predmet za L_2 nalazi se između leća L_1 i L_2. Iz ovoga slijedi da je udaljenost slike L_1 od leće L_1

$$b_1 = d - a_2 = d - \frac{f_2}{2}. \qquad [3 \text{ BODA}]$$

S druge strane, udaljenost predmeta od leće L_1 je

$$a_1 = f_2 - d. \qquad [1 \text{ BOD}]$$

Nadalje, ukupno povećanje konačne slike u odnosu na predmet je

$$m = m_1 m_2 = \left(-\frac{b_1}{a_1}\right)\left(-\frac{b_2}{a_2}\right) = -\frac{2d - f_2}{f_2 - d}, \qquad [2 \text{ BODA}]$$

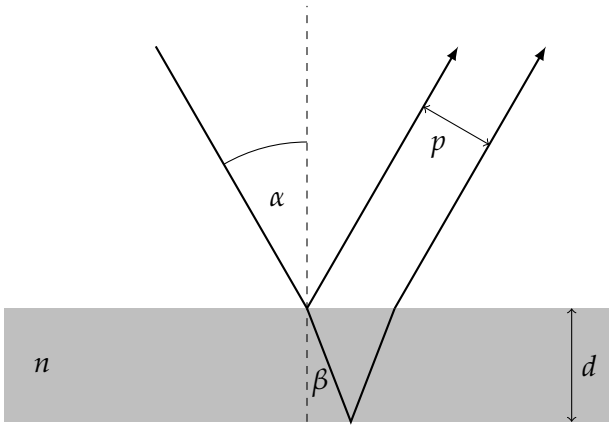
a prema uvjetu zadatka znamo da je slika iste veličine, no obrnuta, odnosno $m = -1$. Odavde možemo odrediti žarišnu duljinu L_2

$$\begin{aligned} f_2 &= \frac{3d}{2} && [1 \text{ BOD}] \\ &= 18\,\text{cm}. && [1 \text{ BOD}] \end{aligned}$$

Žarišnu duljinu leće L_1 možemo odrediti iz jednadžbe leće koristeći poznate vrijednosti a_1 i b_1,

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{\frac{1}{f_2 - d} + \frac{1}{d - f_2/2}} = \frac{d}{6} && [1 \text{ BOD}] \\ &= 2\,\text{cm}. && [1 \text{ BOD}] \end{aligned}$$

4. Upadom na sapunicu, dio zrake svjetlosti se reflektira, a dio lomi u sapunicu i zatim odbija s donje strane sapunice, kao na slici. [1 BOD]



Lom svjetlosti je opisan Snellovim zakonom, tako da vrijedi

$$\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n}. \qquad [1 \text{ BOD}]$$

S druge strane, sa slike se vidi geometrijska veza

$$\frac{p}{\cos\alpha} = 2d \operatorname{tg}\beta. \qquad [2 \text{ BODA}]$$

Odavde možemo izvesti ovisnost pomaka p o upadnom kutu α

$$p = \frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}} d. \qquad [2 \text{ BODA}]$$

Uvrštavajući vrijednosti $\alpha_1 = 10°$, $\alpha_2 = 20°$, te $p_1 = 115\,\text{nm}$ i $p_2 = 220\,\text{nm}$, imamo

$$n = 2\sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \sqrt{\frac{(p_1\cos\alpha_2)^2 - (p_2\cos\alpha_1)^2}{(p_1\sin 2\alpha_2)^2 - (p_2\sin 2\alpha_1)^2}} \qquad [1 \text{ BOD}]$$

$$= 1.59\,, \qquad [1 \text{ BOD}]$$

te

$$d = p_1 p_2 \sqrt{\frac{\sin^2\alpha_1 - \sin^2\alpha_2}{(p_1\sin 2\alpha_2)^2 - (p_2\sin 2\alpha_1)^2}} \qquad [1 \text{ BOD}]$$

$$= 530\,\text{nm}. \qquad [1 \text{ BOD}]$$

5. Granična razlučivost će se ostvariti u slučaju kad vrijedi

$$\theta = 1.22\lambda/D. \qquad \text{[1 BOD]}$$

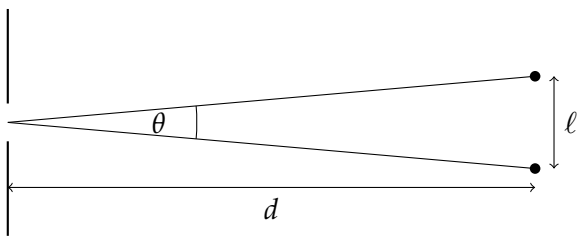
S druge strane, sa slike je jasno da vrijedi

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{\ell}{2d}. \qquad \text{[2 BODA]}$$

Koristeći aproksimaciju malih kutova imamo $\operatorname{tg}(\theta/2) \approx \theta/2$, odnosno

$$\theta = \frac{\ell}{d}. \qquad \text{[2 BODA]}$$

Odavde je jednostavno odrediti traženu udaljenost

$$d = \frac{\ell D}{1.22\lambda} \qquad \text{[2 BODA]}$$

$$= 7.75\,\text{km}. \qquad \text{[1 BOD]}$$