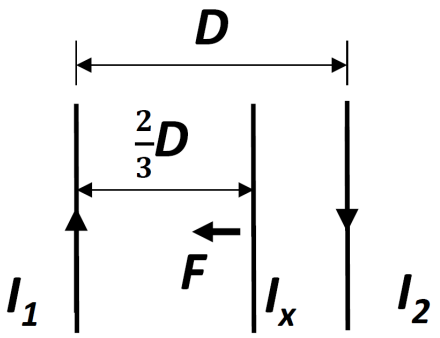
Zadaci za općinsko natjecanje 2018. – 3. skupina

VAŽNO:
Tijekom ispita ne smijete imati nikakav pisani materijal (knjige, bilježnice, formule...). Za pisanje koristite kemijsku olovku ili nalivpero. Pri ruci ne smijete imati mobitele ni druge elektroničke uređaje osim kalkulatora.

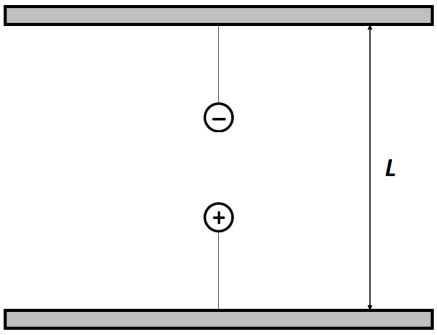
Zadatak 1 (10 bodova)

Tri žice duljine $L = 1$ m leže paralelno u ravnini kao na slici, tako da je udaljenost među vanjskim žicama $D = 1$ cm, a središnja žica je udaljena od lijeve $d = 2/3D$. Struje kroz vanjske žice su I_1 i I_2 u smjerovima kao na slici, dok kroz središnju žicu teće struja $I_x = 10$ A u nepoznatom smjeru. Sila zbog struja I_1 i I_2 na središnju žicu je $F = 10$ mN u smjeru kao na slici. Ako okrenemo smjer struje I_1, sila je sada $F = 5$ mN u istom smjeru. Nađi I_1, I_2 te smjer struje I_x.



Zadatak 2 (10 bodova)

Dvije kuglice iste mase m i naboja q istog iznosa ali suprotnog predznaka se nalaze između dvije nabijene ploče u gravitacijskom polju Zemlje. Ploče su dovoljno velike da je električno polje između njih homogeno i konstantno. Pozitivno nabijena kuglica je vezana tankom niti za donju ploču, a negativno nabijena kuglica s niti za gornju ploču. Električno polje je dovoljno jako da u ravnoteži obje kuglice stoje vertikalno kao na slici.



Ako izbacimo obje kuglice iz ravnoteže, nađi izraz za period titranja jedne i druge kuglice. Nađi izraz za sve napone između ploča za koje je period jedne kuglice višekratnik perioda druge kuglice. U zadatku pretpostavljamo da kuglice ne utječu jedna na drugu.

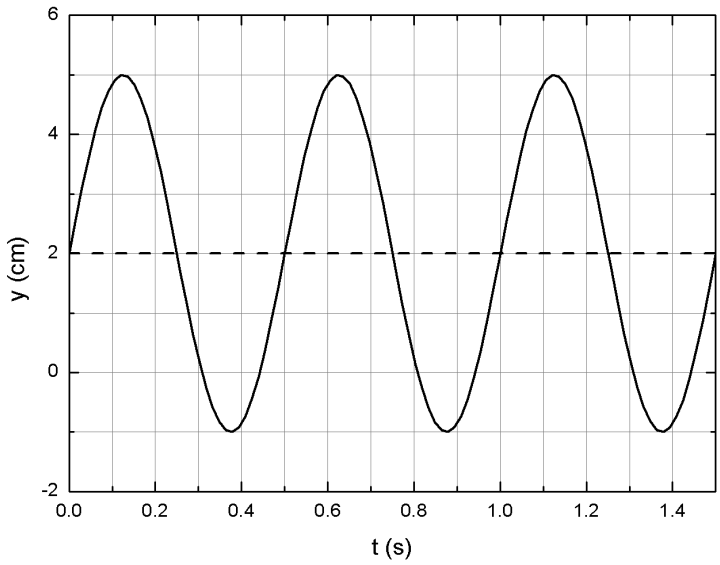
Oba rješenja prikaži preko naboja q, mase m, električnog polja E, udaljenosti ploča L i gravitacijskog ubrzanja g.

Zadatak 3 (10 bodova)

Na horizontalnoj površini bez trenja nalazi se opruga učvršćena za zid na kojoj titra masa $M = 0.5$ kg. Period titranja mase je $T = 0.5$ s, a amplituda titranja je $A = 20$ cm. U trenutku kada je opruga najrastegnutija masu pogodi metak $m = 5$ g brzine $v = 400$ m/s i zalijepi se za nju. Nađi novu amplitudu i period titranja mase M. Napomena: budući da je masa metka mnogo manja od mase M, možemo zanemariti povećanje mase na kraju.

Zadatak 4 (10 bodova)

Uteg mase $m = 10$ g visi na opruzi čija je slobodna duljina zanemariva. Gibanje utega možemo opisati sinusoidom, kao na donjem grafu, gdje je y neka laboratorijska koordinata. Nađi konstantu opruge i maksimalnu brzinu utega.



Zadatak 5 (10 bodova)

Elektron i nepoznata čestica upadaju u područje homogenog magnetskog polja tako da im je brzina okomita na to polje. Poznato je da im je kinetička energija ista. Nepoznata čestica se otkloni u suprotnom smjeru od elektrona, a radijus njene putanje je $r = 35\ r_e$, gdje je r_e radijus putanje elektrona. Nađite najboljeg kandidata za uočenu česticu iz tablice. Masa u tablici je dana u jedinicama MeV/c^2, gdje je 1 eV $= 1.602 \cdot 10^{-19}$ J. Pretpostavite da su brzine čestica puno sporije od brzine svjetlosti $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

Ime	Oznaka	Naboj (e)	Masa (MeV)
Elektron	e^-	-1	0.511
Proton	p^+	$+1$	938
Lambda šarm	Λ_c^+	$+1$	2286
Sigma minus	Σ^-	-1	1197
Sigma šarm	Σ_c^{++}	$+2$	2453
Sigma šarm	Σ_c^+	$+1$	2453
Sigma dno	Σ_b^-	-1	5800

Zadaci za općinsko natjecanje 2018. – 3. skupina
Rješenja

Zadatak 1 (10 bodova)

Smjer sile nam određuje smjer struje I_x. Ako pretpostavimo da I_x teće prema gore, tada bi sila između I_1 i I_x bila privlačna (struje u istom smjeru) a između I_2 i I_x odbojna (suprotni smjer) što je točno naš slučaj. U suprotnom, sila od I_1 bi bila odbojna a I_2 privlačna, što bi značilo ukupnu silu u desno. **(2 boda)**

Sila na žicu I_x je dana relacijom:

$$F_1 = L\frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{I_1 I_x}{\frac{2}{3}D} + \frac{I_2 I_x}{\frac{1}{3}D}\right)$$

(2 boda)

U slučaju promjene smjera struje $I_1 \to -I_1$ relacija je sada:

$$F_2 = L\frac{\mu_0}{2\pi}\left(-\frac{I_1 I_x}{\frac{2}{3}D} + \frac{I_2 I_x}{\frac{1}{3}D}\right)$$

(2 boda)

Ako zbrojimo obje relacije prvi član se poništi i preostaje:

$$F_1 + F_2 = L\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{2I_2 I_x}{\frac{1}{3}D} = \frac{3\mu_0 L I_x}{\pi D} I_2$$

$$I_2 = \frac{(F_1 + F_2)\pi D}{3\mu_0 L I_x} = 12.5 \text{ A}$$

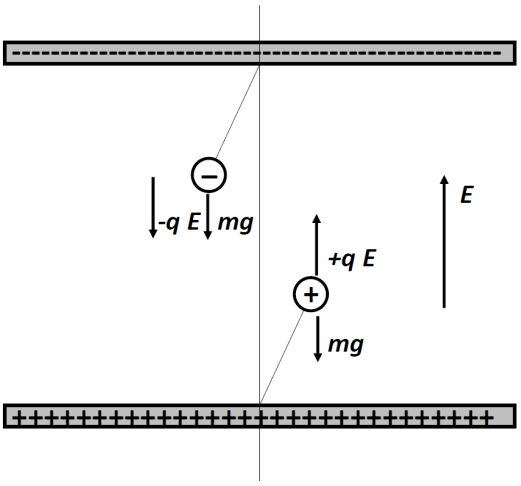
(2 boda)

Sada I_2 možemo uvrstiti u bilo koju jednadžbu (relacija s F_1 ili F_2) i dobiti vrijednost $I_1 = 8.33$ A. **(2 boda)**

Zadatak 2 (10 bodova)

Električno polje između dvije ploče je povezano s naponom između tih ploča kao $U = E \cdot L$, tj. polje je $E = U/L$. **(1 bod)**

Raspišimo sile na obje kuglice kada su pomaknute malo izvan ravnoteže. Raspis je identičan kao i za obično matematičko njihalo, osim što postoji dodatna sila zbog električnog polja. Za donju kuglicu, da bi stajala uspravno, električna sila mora biti prema gore, i mora biti jača od gravitacije. Neto sila na kuglicu je dakle $F_e - F_g$ u slučaju donje i $F_e + F_g$ u slučaju gornje kuglice. **(3 boda)**



Periodi ova dva njihala su stoga

$$T_+ = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{l}{\frac{eE}{m} - g}} \quad ; \quad T_- = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{l}{\frac{eE}{m} + g}}$$

(2 boda)

T_+ je uvijek veći od T_- (zbog manjeg nazivnika) pa zaključujemo da T_+ mora biti višekratnik od T_-. To znači da omjer T_+/T_- mora biti cijeli broj $n \in \mathbb{N} > 1$. Dakle:

$$\frac{T_+}{T_-} = \sqrt{\frac{eE/m + g}{eE/m - g}} = n$$

(2 boda)

$$\frac{eE}{m} + g = n^2 \left(\frac{eE}{m} - g \right)$$

Kratkim sređivanjem izraza dobije se:

$$E = \frac{n^2 + 1}{n^2 - 1} \frac{mg}{e}$$

Naponi kod kojih je jedan period višekratnik drugog perioda su:

$$U = E \cdot L = \frac{n^2 + 1}{n^2 - 1} \frac{mgL}{e}$$

(2 boda)

Zadatak 3 (10 bodova)

Masa na opruzi titra periodom $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. Iz poznatog perioda i mase možemo izvući k:

$$k = \frac{4\pi^2 m}{T^2} = 79 \text{ N/m}$$

(2 boda)

Metak se sudara sa masom u trenutku kada je opruga najrastegnutija. U toj točki titranja brzina mase je nula tik prije sudara, pa je zakon očuvanja količine gibanja:

$$p_{metak} = p_{masa}$$
$$mv_m = Mv_M$$

i brzina koju dobije masa M je:

$$v_M = \frac{m}{M} v_m = 4 \text{ m/s}$$

(2 boda)

Budući da period titranja ne ovisi o brzini mase, nego samo o masi i konstanti opruge, period se neće mijenjati! **(2 boda)**

Promjenu amplitude možemo vidjeti preko energije:

$$E_{uk} = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

U amplitudi $x = A$ je brzina $v = 0$, pa je sva energija u potencijalnoj energiji opruge:

$$E_{uk} = \frac{1}{2}kA^2$$

Poslije sudara ukupna energija sustava se povećala za kinetičku energiju mase:

$$E_{uk} = E_{prije} + \frac{1}{2}Mv_M^2$$

(2 boda)

Iz posljednje dvije relacije možemo izraziti novu amplitudu:

$$\frac{1}{2}kA_{nova}^2 = \frac{1}{2}kA_{stara}^2 + \frac{1}{2}Mv_M^2$$

$$A_{nova} = \sqrt{\frac{Mv_M^2}{k} + A_{stara}^2} = 37.6 \text{ cm}$$

(2 boda)

Ako učenik računa s ukupnom masom $M + m$, bez zanemarivanja metka, priznaju se rješenja. U tom slučaju je i period titranja neznatno dulji!

Zadatak 4 (10 bodova)

Uteg s oprugom čini harmonički oscilator koji titra oko ravnotežnog položaja. Period harmoničkog oscilatora dan je s

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

(2 boda)

a iznos perioda očitamo sa grafa: $T = 0.5$ s. Konstanta opruge je

$$k = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 m = 1.58 \text{ N/m}$$

(2 boda)

Maksimalnu brzinu utega nalazimo iz zakona očuvanja energije: $E = E_{kin} + E_{el}$. Prepoznajemo da uteg titra oko ravnotežnog položaja što je $y = 2$ cm, te da je amplituda titranja $A = 5 - 2 = 3$ cm. **(2 boda)**

Kada je uteg maksimalno otklonjen, sva energija je pohranjena u energiji opruge $E_{el} = \frac{1}{2}kA^2$. Kada je uteg u ravnoteži, energija opruge je minimalna ($E_{el} = 0$), pa je sva energija pohranjena u kinetičkoj energiji utega. Zato pišemo:

$$E_{kin}^{max} = E_{el}^{max} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_{max}^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

(2 boda)

Iz čega nalazimo maksimalnu brzinu:

$$v_{max} = \sqrt{\frac{k}{m}}A = 37.7 \text{ cm/s}$$

(2 boda)

Zadatak 5 (10 bodova)

Nabijena čestica u magnetskom polju se giba po kružnici zbog utjecaja Lorentzove sile $F_L = qvB$ koja ima ulogu centripetalne sile $F_{cp} = mv^2/r$. Izjednačavanjem izraza možemo dobiti izraz za radijus:

$$r = \frac{mv^2}{qvB} = \frac{mv}{qB}$$

(2 boda)

Brzina čestice je definirana njenom kinetičkom energijom kao $E = \frac{1}{2}mv^2$, pa možemo brzinu izraziti preko energije $v = \sqrt{2E/m}$:

$$r = \frac{m\sqrt{\frac{2E}{m}}}{qB} = \frac{\sqrt{2mE}}{qB}$$

(2 boda)

Ono po čemu se čestice razlikuju su masa m i naboj q, dok je energija ista za svaku česticu, kao i magnetsko polje u kojem se nalaze. Zato je omjer radijusa elektrona i nepoznate čestice:

$$r/r_e = \frac{e}{\sqrt{m_e}} \frac{\sqrt{m}}{q}$$

Sve što možemo saznati o nepoznatoj čestici je omjer korjena mase i naboja čestice, pa taj omjer moramo usporediti s navedenim česticama u tablici. Iz zadatka znamo da je otklon nepoznate čestice u drugom smjeru od otklona elektrona, što nam govori da je naboj nepoznate čestice suprotnog predznaka, tj $+$. **(2 boda)**

Preostaje nam usporediti omjer korjena mase i naboja za pozitivne čestice sa izrazom

$$\frac{\sqrt{m}}{q} = \frac{\sqrt{m_e}}{e} \frac{r}{r_e} \approx 25 \ \text{kg}^{1/2}/\text{C}$$

(2 boda)

U tablici je najbliže tom izrazu čestica Σ_c^{++}: $\sqrt{m}/q\ (\Sigma_c^{++}) = 24.76 \ \text{kg}^{1/2}/\text{C}$ **(2 boda)**