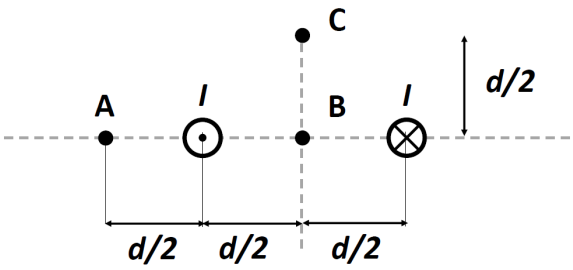
Zadaci za općinsko natjecanje 2017. – 3. skupina

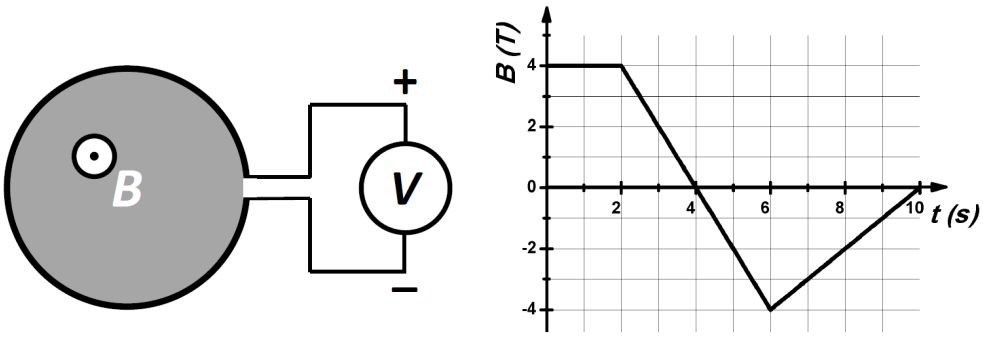
Zadatak 1 (10 bodova)

Dvije žice kroz koje teče struja I se nalaze kao na slici. U lijevu žicu struja ulazi *u papir*, dok u desnoj izlazi. Nađi smjer i iznos magnetskog polja u točkama A, B i C.



Zadatak 2 (10 bodova)

Kružni dio žice sa slike se u početnom trenutku $t = 0$ nalazi u uniformnom magnetskom polju $B = 4$ T u smjeru *van papira*. Površina kroz koju prolazi magnetsko polje je $S = 10\ 000$ mm^2. Na njega je spojen voltmetar kao na slici. Voltmetar mjeri pozitivan napon ako je potencijal na '$+$' kraju veći od potencijala na '$-$' kraju. Magnetsko polje se počne mijenjati, kao što je prikazano na grafu. Nacrtaj na grafu napon na voltmetru.



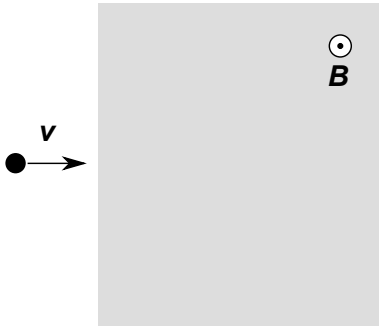
Zadatak 3 (10 bodova)

Jedno njihalo (sastavljeno od niti duljine l i kuglice mase m) je postavljeno u lift, dok se drugo nalazi u prizemlju zgrade. Lift s njihalom krene prema gore konstantnom akceleracijom $w = 0.44g$ do visine h, a potom se spusti natrag u prizemlje istim iznosom akceleracije w. Ako njihalo u prizemlju za to vrijeme napravi $N_0 = 100$ njihaja, koliko će napraviti njihalo u liftu? Napomena: broj njihaja ne mora biti cijeli broj.

Zadatak 4 (10 bodova)

Na masenom spektrometru proučavamo radioaktivni materijal za kojeg znamo da se sastoji od mješavine $^{238}_{92}$U i $^{235}_{92}$U. Atome materijala ioniziramo tako da im je naboj $Q = +e$, ubrzavamo do brzine v jednake za oba izotopa i ubacujemo u područje magnetskog polja B okomitog na upadnu brzinu (slika).

(a) Skicirajte putanju pozitivno nabijene čestice u magnetskom polju!
(b) Kako će se mijenjati iznos brzine $|v|$ tokom gibanja kroz magnetsko polje?
(c) Koja će biti udaljenost dvaju izotopa urana, ako je upadna brzina $v = 600$ m/s, a magnetsko polje $B = 1$ T. Masa izotopa je $m_1 = 238u$, $m_2 = 235u$, gdje je $u = 1.6605 \cdot 10^{-27}$ kg unificirana jedinica mase.

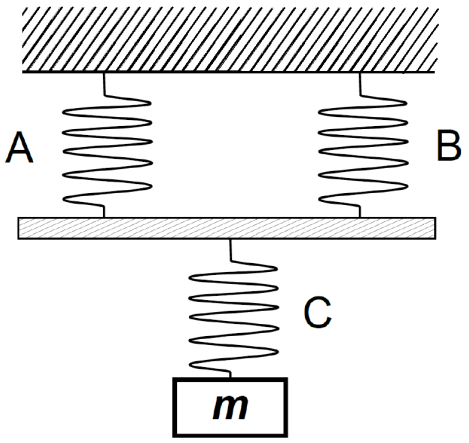


Zadatak 5 (10 bodova)

Dvije opruge A i B su spojene na bezmasenu šipku, koja je s oprugom C spojena za uteg mase m. Šipka se može pomicati samo gore-dolje (opruge A i B su jednako istegnute). Sve opruge su identične, konstante opruge k i zanemarive duljine u nerastegnutom stanju.

1. Koliko je produljenje pojedine opruge kada uteg miruje u gravitacijskom polju Zemlje?
2. Ako uteg pomaknemo iz mirovanja, koliki je njegov period titranja T?

Oba rezultata izrazite preko poznatih veličina m, k i g.



Zadaci za općinsko natjecanje 2017. – 3. skupina
Rješenja

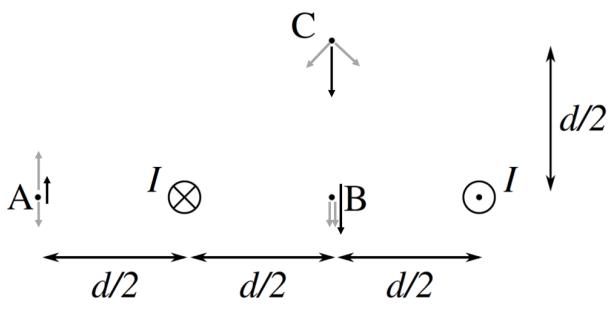
Zadatak 1 (10 bodova)

Smjer magnetskog polja oko žice nađemo po pravilu desne ruke i/ili znamo da je okomit na radij vektor udaljenosti od žice. Iznos magnetskog polja od žice je $B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, gdje je r udaljenost promatrane točke od žice.

(1 bod)

Za svaku točku treba izračunati udaljenosti od obje žice, te smjer magnetskog polja od svake žice i potom ih zbrojiti vektorski kao na slici.

(3x1 bod)



Vrijednosti magnetskog polja su:

A: Udaljenost od prve žice je $d/2$ a od druge $3d/2$. Stoga je $B_{1A} = \frac{\mu_0 I}{\pi d}$, $B_{2A} = \frac{\mu_0 I}{3\pi d}$ Ukupno polje je prema dolje, a dobije se vektorskim zbrojem:

$$B_A = B_{1A} - B_{2A} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\mu_0 I}{\pi d}$$

(2 boda)

B: Udaljenost od prve žice je $d/2$, isto kao i od druge. Stoga je $B_{1B} = B_{2B} = \frac{\mu_0 I}{\pi d}$ Ukupno polje je zbroj ova dva, za koje vektorski zbroj daje:

$$B_B = B_{1B} + B_{2B} = 2\,\frac{\mu_0 I}{\pi d}$$

(2 boda)

C: Udaljenost točke od obje žice je jednaka i dobije se iz pitagorinog poučka: $r = \sqrt{(d/2)^2 + (d/2)^2} = \sqrt{2}\,d/2$. Polja obje žice su jednaka po iznosu: $B_{1C} = B_{2C} = \frac{\mu_0 I}{\sqrt{2}\,\pi d}$ Budući da su ta dva vektora okomiti jedan na drugog, ne možemo ih samo zbrojiti, već i na njih moramo primjeniti pitagorin poučak kako bi dobili ukupno magnetsko polje:

$$B_C = \sqrt{B_{1C}^2 + B_{2C}^2} = \frac{\mu_0 I}{\pi d}$$

(2 boda)

Zadatak 2 (10 bodova)

Iz poznate relacije za elektromagnetsku indukciju:

$$V = -\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} = -\frac{\Delta B \cdot S}{\Delta t} = -S\frac{\Delta B}{\Delta t}$$

(2 boda)

Površina S je zadana i treba je pretvoriti u SI jedinice: $S = 0.01$ m^2. **(1 bod)**

Iz zadanog grafa možemo očitati $\Delta B/\Delta t$ kao nagib pravca.

a) Za $t < 2$ s nema promjene polja, dakle $\Delta B/\Delta t = 0$ T/s.

b) Za $2 < t < 6$ s polje pada pa je promjena negativna, $\Delta B/\Delta t = -2$ T/s.

c) Za $6 < t < 10$ s polje raste pa je promjena pozitivna, $\Delta B/\Delta t = 1$ T/s. **(2 boda)**

Smjer induciranog napona određujemo pravilom desne ruke. Kako se magnetsko polje u petlji smanjuje, inducira se napon u smjeru koji se *opire smanjenju polja*. **(2 boda)**

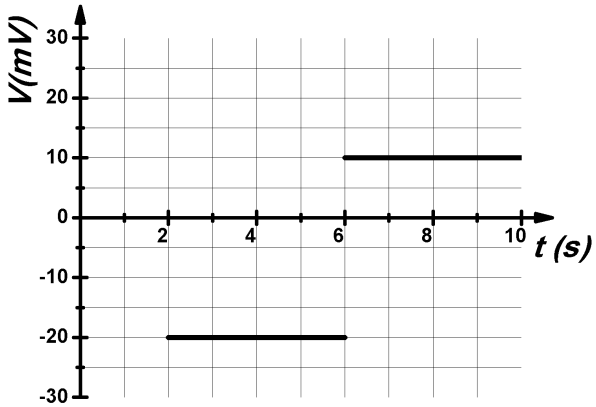
Iz ovoga proizlazi da su konačni rezultati za napone koje ucrtavamo na graf:

$V_a = 0$ mV,

$V_b = -20$ mV,

$V_c = 10$ mV

(3 boda)



Zadatak 3 (10 bodova)

Period njihala dan je s $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. **(2 boda)**

Prepoznajmo ako se lift giba prema gore nekom akceleracijom, radi se o neinercijalnom sustavu: ukupna akceleracija na njihalo je gravitacijska i neinercijalna, stoga $g_g = g + w$. Kad se lift giba prema dolje, smjer neinercijalne akceleracije je drugačiji, stoga $g_d = g - w$. **(2 boda)**

Iz podatka da njihalo u prizemlju obavi $N_0 = 100$ njihaja znamo koliko je vremena prošlo:

$$t_{uk} = 100T = 100 \cdot 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Također, budući da lift prema gore i prema dolje putuje istom akceleracijom, zaključujemo da oba puta traju jednako: $t_{uk}/2$ **(2 boda)**

Sada možemo napisati koliko njihaja napravi prema gore i prema dolje:

$$N_g = \frac{t_{uk}/2}{T_g} = 50 \cdot 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{g+w}{l}} = 50\sqrt{\frac{g+w}{g}}$$

$$N_d = \frac{t_{uk}/2}{T_d} = 50 \cdot 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{g-w}{l}} = 50\sqrt{\frac{g-w}{g}}$$

Ukupno, njihalo u liftu napravi $N = N_d + N_g$ njihaja, tj:

$$N = N_g + N_d = \frac{50}{\sqrt{g}}\left(\sqrt{g+w} + \sqrt{g-w}\right)$$

(2 boda)

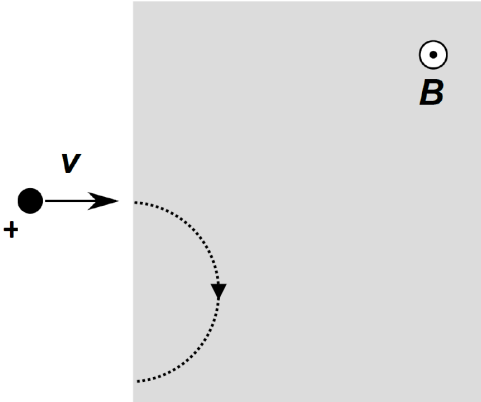
Uvrštavanjem brojeva dobijemo $N_g = 60$ njihaja, $N_d = 37.42$ njihaja. Sve skupa $N = 97.42$ njihaja, tj. punih 97 i nešto manje od pola idućeg. **(2 boda)**

Zadatak 4 (10 bodova)

Skica putanje pozitivno nabijene čestice u magnetskom polju **(2 boda)**

Lorentzova sila djeluje okomito na smjer brzine, zbog čega se iznos brzine ne mijenja, samo njen smjer. Magnetsko polje ne vrši rad pa se kinetička energija ne mijenja. **(2 boda)**

Izraz za Lorentzovu silu je $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$. Uz uvjet da postoji samo magnetsko polje, koje djeluje okomito, izraz postaje $F = qvB$. **(2 boda)**



Budući da se naboj giba po kružnici, prepoznajemo da Lorentzova sila ima ulogu centripetalne sile. Izjednačimo li izraze tih dviju sila dobijemo izraz za radijus zakrivljenosti:

$$qvB = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow r = \frac{mv}{qB}$$ **(2 boda)**

Iz ovoga se odredi putanja dvaju izotopa: $r_{235} = m_{235}\frac{v}{eB}$, $r_{238} = m_{238}\frac{v}{eB}$.

Izrazi radijusa su jako bliski, ali nisu identični: $r_{235} = 1.41$ mm, $r_{238} = 1.428$ mm. Geometrijskim razmatranjem odredimo udaljenosti $d = 2r_{238} - 2r_{235} = 0.036$ mm

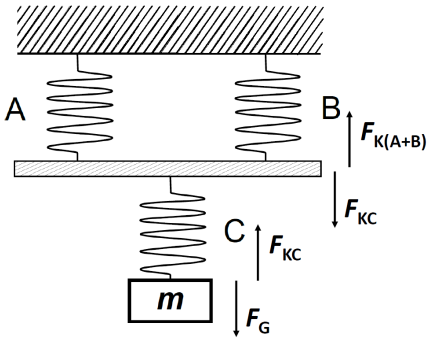
(2 boda)

Zadatak 5 (10 bodova)

(1) **Produljenje opruge:**

Hookeov zakon – elastična sila $F = -kl$ **(2 boda)**

Sile na svaku oprugu – produljenje i treći Newtonov zakon. Silu težine utega na oprugu C označimo s $F_G = mg$. Elastičnu silu opruge C nazovemo $F_{KC} = kl_C$. Opruga djeluje na bezmasenu šipku, pa je i tamo F_C. Na šipku djeluju i opruge A i B, a njihove sile se zbrajaju: $F_A + F_B = k(l_A + l_B)$. Budući da su opruge A i B iste, zaključujemo $l_A = l_B$. Slijede dvije relacije u slučaju mirovanja opruge:



$$F_G = F_C \Rightarrow mg = kl_C \Rightarrow l_C = mg/k$$

$$F_C = F_A + F_B \Rightarrow kl_C = 2kl_A \Rightarrow l_C = 2l_A$$

Iz ove dvije relacije možemo naći produljenje l_C a time i l_A i l_B. Opruga C se produlji za mg/k a opruge A i B za $mg/2k$. **(3 boda)**

(2) **Period titranja:** Prepoznati da sustav opruga djeluje istim tipom sile kao i da imamo jednu oprugu – razlika je u konstanti opruge. Zamislimo li da povučemo uteg prema dolje za x, iz prvog dijela zadatka znamo da će se opruga C produljiti dvaput dulje od A i B a sveukupno x, pa je $x_A = x/3$, $x_C = 2x/3$. Sila koja djeluje na uteg tada je $F_C = kx_C = \frac{2}{3}kx$. Iz ovoga prepoznajemo da je efektivna konstanta opruge za sustav opruga

$$k_{eff} = \frac{2k}{3}$$

(3 boda)

Iz poznavanja titranja harmoničkog oscilatora/opruge izraziti period titranja T.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_{eff}}} = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{2k}}$$

(2 boda)

Napomena: uz poznavanje pravila za zbrajanje opruga efektivna konstanta se može naći i na drugačiji način: serijski spoj opruga se recipročno zbraja: $1/k = 1/k_1 + 1/k_2$; paralelni spoj opruga se zbraja: $k = k_1 + k_2$. Naš sustav je paralelni spoj A i B sa serijskim spojem C. Dobije se:

$$k_{AB} = k_A + k_B = 2k$$

$$\frac{1}{k_{eff}} = \frac{1}{k_{AB}} + \frac{1}{k_C} = \frac{1}{2k} + \frac{2}{2k} = \frac{3}{2k}$$

$$k_{eff} = \frac{2k}{3}$$