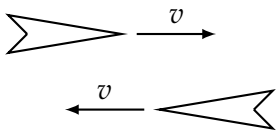
Općinsko natjecanje iz fizike

- srednje škole: IV. grupa -

30.01.2017.

1. Dvije identične rakete gibaju se jedna prema drugoj po paralelnim putanjama, kao na donjoj slici.



U nekom (inercijalnom) referentnom sustavu obje rakete imaju istu duljinu $\ell = 50\,\mathrm{m}$ te se gibaju istom brzinom $v = \frac{1}{2}c$.

- Ako opažač koji miruje u jednoj raketi mjeri duljinu druge rakete, koju će vrijednost dobiti?
- Koliko će dugo, za istog promatrača, trajati mimoilaženje raketa?

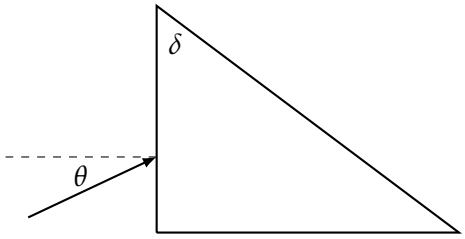
[10 bodova]

2. Kojom se najvećom brzinom smije gibati čestica kojoj kinetičku energiju računamo nerelativističkom formulom i želimo da se rezultat od ispravnog (relativističkog) razlikuje za maksimalno 1%? Uzmite da se relativna greška prilikom nerelativističkog računa mjeri formulom

$$\epsilon = 1 - \frac{E_{\mathrm{NR}}}{E_{\mathrm{R}}}.$$

[10 bodova]

3. Zraka svjetlosti upada pod kutom $\theta = 23°$ u odnosu na okomicu jedne strane staklene prizme indeksa loma $n = 1.5$ te kuta $\delta = 34°$, kao na slici. Skicirajte putanju zrake unutar prizme i odredite za koji će se kut φ izlazna zraka zakrenuti u odnosu na smjer upadne zrake.



[12 bodova]

4. Da biste eliminirali refleksiju na prozorskom staklu (indeksa loma $n_s = 1.5$) namjeravate premazati unutarnju stranu stakla tankim antireflektirajući filmom. Želite da debljina tog filma bude čim manja i da uopće ne dolazi do refleksije kad pogledate okomito na staklo. (Srednja valna duljina vidljive svjetlosti je $\lambda = 550\,\mathrm{nm}$.)

   - Hoće li indeks loma antireflektirajućeg filma n_f biti veći ili manji od indeksa loma stakla? Ovisno o odgovoru, u nastavku zadatka uzmite $n_f = n_s^2$, odnosno $n_f = \sqrt{n_s}$.
   - Kolika mora biti minimalna debljina filma d da biste postigli traženi cilj?

[10 BODOVA]

5. Vodikov spektar sadrži crvenu liniju valne duljine 656 nm, te ljubičastu liniju valne duljine 434 nm. Taj spektar promatramo kroz difrakcijsku rešetku koja ima 4500 pukotina po centimetru. Odredite kutnu razliku među položajima maksimuma ovih linija u svim redovima difrakcije ako svjetlost upada okomito na rešetku.

[8 BODOVA]

Vrijednosti fizikalnih konstanti:

- brzina svjetlosti: $c = 3 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$.

Općinsko natjecanje iz fizike - rješenja

- srednje škole: IV. grupa -

30.01.2017.

Upute za bodovanje: Ovdje je prikazan jedan način rješavanja zadataka. Ako učenici riješe zadatak drugačijim, a fizikalno ispravnim načinom, treba im dati puni broj bodova predviđen za taj zadatak. Ako učenici ne napišu posebno svaki ovdje predviđeni korak, a vidljivo je da su ga napravili, treba im dati bodove kao da su ga napisali.

1. Da bismo odgovorili na pitanja postavljena u zadatku, moramo preći iz početnog referentnog sustava u sustav mirovanja jedne od raketa. U tom će sustavu jedna od raketa mirovati, a druga će se gibati brzinom

$$v' = \frac{\frac{c}{2} + \frac{c}{2}}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{5}c. \qquad \text{[2 boda]}$$

Dalje, duljina mirujuće rakete je upravo njena vlastita duljina

$$\ell_0 = \gamma\ell = \frac{\ell}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\ell, \qquad \text{[2 boda]}$$

dok je duljina gibajuće rakete

$$\ell' = \frac{\ell_0}{\gamma'} = \frac{2}{\sqrt{3}}\ell\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{5}\ell \qquad \text{[2 boda]}$$

$$= 34.64\,\mathrm{m}. \qquad \text{[1 bod]}$$

Vrijeme potrebno da se rakete mimoiđu jest

$$t = \frac{\ell_0 + \ell'}{v'} = \frac{4}{\sqrt{3}}\frac{\ell}{c} \qquad \text{[2 boda]}$$

$$= 3.85 \times 10^{-7}\,\mathrm{s}. \qquad \text{[1 bod]}$$

2. Nerelativistička kinetička energija je dana izrazom

$$E_{\mathrm{NR}} = \frac{1}{2}mv^2, \qquad [1 \text{ BOD}]$$

gdje su m i v masa i brzina čestice. U relativističkom slučaju imamo pak,

$$E_{\mathrm{R}} = (\gamma - 1)mc^2, \qquad [1 \text{ BOD}]$$

gdje je γ standardni relativistički faktor. Za proizvoljni $\epsilon \in [0, 1]$ brzina v, odnosno parametar $\beta = v/c$ je određen jednadžbom

$$\epsilon = 1 - \frac{\frac{1}{2}mv^2}{(\gamma - 1)mc^2} = 1 - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\sqrt{1-\beta^2}}\beta^2 \qquad [2 \text{ BODA}]$$

što se uz pokrate $x \equiv \beta^2$ i $K \equiv 2(1-\epsilon)$ svodi na jednadžbu

$$(x + K)\sqrt{1-x} = K. \qquad [2 \text{ BODA}]$$

Nakon kvadriranja i sređivanja dobivenog izraza, dobije se kvadratna jednadžba po x,

$$x^2 + x(2K - 1) + K(K - 2) = 0. \qquad [1 \text{ BOD}]$$

Fizikalno rješenje ove jednadžbe je

$$x = \frac{1}{2}\left(1 - 2K + \sqrt{1 + 4K}\right), \qquad [1 \text{ BOD}]$$

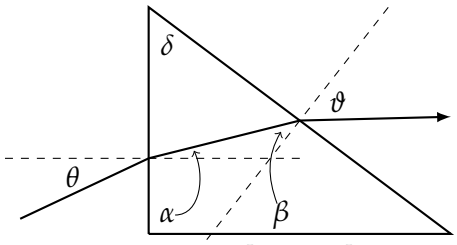
što daje za brzinu

$$v = \sqrt{\frac{1}{2}\left(4\epsilon - 3 + \sqrt{9 - 8\epsilon}\right)}c \qquad [1 \text{ BOD}]$$

$$= 3.46 \times 10^7 \,\mathrm{m/s}, \qquad [1 \text{ BOD}]$$

gdje smo u zadnjem redu uvrstili $\epsilon = 0.01$.

3. Skica zrake svjetlosti u prizmi:



[2 BODA]

Uz kutove kao na slici, pišemo Snellov zakon

$$\sin\theta = n\sin\alpha \qquad \& \qquad \sin\vartheta = n\sin\beta. \qquad \text{[2 BODA]}$$

Razmatranjem trokuta kojeg čine dva brida prizme i zraka svjetlosti, nalazimo vezu između kutova α i β te kuta prizme δ

$$\delta + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \pi \quad \rightsquigarrow \quad \delta = \alpha + \beta. \qquad \text{[2 BODA]}$$

Ukupan kut otklona računamo tako da zbrojimo sve otklone prilikom loma svjetlosti

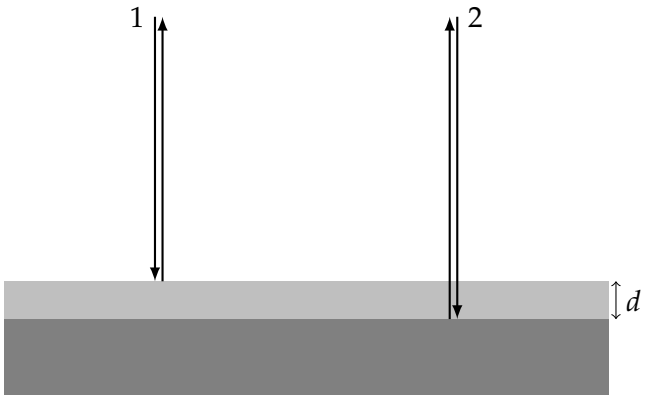
$$\varphi = (\theta - \alpha) + (\vartheta - \beta) = \theta + \vartheta - \delta. \qquad \text{[2 BODA]}$$

Uzimajući sve gornje relacije u obzir, imamo

$$\varphi = \theta - \delta + \arcsin\left\{n\sin\left[\delta - \arcsin\left(\frac{1}{n}\sin\theta\right)\right]\right\} \qquad \text{[3 BODA]}$$

$$= 18.07^\circ. \qquad \text{[1 BOD]}$$

4. Promotrimo dvije koherentne paralelne zrake svjetlosti koje upadaju na staklo na kojem se nalazi tanki sloj filma.



Neka se zraka 1 reflektira od filma. Budući da je indeks loma filma svakako veći od 1, prilikom odbijanja zraka promjeni fazu

$$\delta\varphi_1 = \pi. \qquad [1 \text{ BOD}]$$

S druge strane, neka zraka 2 prođe kroz film te se odbije na granici film-staklo. U trenutku izlaska iz filma, njoj će faza biti promijenjena u odnosu na upadnu za

$$\delta\varphi_2 = 2\pi \times \frac{2n_\mathrm{f}d}{\lambda} + \kappa\pi, \qquad [2 \text{ BODA}]$$

gdje je $\kappa = 0(1)$ ako je $n_\mathrm{f} > (<) n_\mathrm{s}$. Prema tome, razlika u fazi među zrakama nakon refleksije je

$$\Delta\varphi = \delta\varphi_2 - \delta\varphi_1 = 2\pi \times \frac{2n_\mathrm{f}d}{\lambda} + (\kappa - 1)\pi. \qquad [1 \text{ BOD}]$$

Ukoliko želimo da ne dolazi do refleksije, ove dvije zrake moraju destruktivno interferirati, što znači da mora vrijediti

$$\Delta\varphi = p\pi, \qquad [2 \text{ BODA}]$$

gdje je p neparan cijeli broj. Odavde slijedi

$$d = \frac{\lambda}{4n_\mathrm{f}}(p + 1 - \kappa). \qquad [1 \text{ BOD}]$$

Budući da želimo da d bude čim manji, to znači da je $\kappa = 1$ i $p = 1$. Odnosno, indeks loma filma mora biti manji od indeksa loma stakla. [1 BOD]

Minimalna debljina filma je stoga

$$d = \frac{\lambda}{4\sqrt{n_\mathrm{s}}} \qquad [1 \text{ BOD}]$$

$$= 112\,\mathrm{nm}. \qquad [1 \text{ BOD}]$$

5. Maksimumi intenziteta difraktirane svjetlosti će se pojaviti pod kutovima određenim uvjetom

$$d \sin\theta = m\lambda, \qquad [1 \text{ BOD}]$$

gdje je d konstanta rešetke, m je red difrakcije, a λ valna duljina svjetlosti. Za $m = 0$ imamo centralni maksimum kojem će doprinositi obje valne duljine, te će stoga kutna razlika iščezavati

$$\Delta\theta_0 = 0°. \qquad [1 \text{ BOD}]$$

U prvom redu difrakcije imamo

$$\begin{aligned} \Delta\theta_1 &= \arcsin\frac{\lambda_c}{d} - \arcsin\frac{\lambda_{lj}}{d} && [1 \text{ BOD}] \\ &= 5.91°. && [1 \text{ BOD}] \end{aligned}$$

U drugom redu difrakcije imamo

$$\begin{aligned} \Delta\theta_2 &= \arcsin\frac{2\lambda_c}{d} - \arcsin\frac{2\lambda_{lj}}{d} && [1 \text{ BOD}] \\ &= 13.19°. && [1 \text{ BOD}] \end{aligned}$$

U trećem redu difrakcije imamo

$$\begin{aligned} \Delta\theta_3 &= \arcsin\frac{3\lambda_c}{d} - \arcsin\frac{3\lambda_{lj}}{d} && [1 \text{ BOD}] \\ &= 26.46°. && [1 \text{ BOD}] \end{aligned}$$

Budući da je $m = 3$ najveći mogući red difrakcije crvene svjetlosti, ovo su sve kutne razlike među maksimumima dviju spektralnih linija.