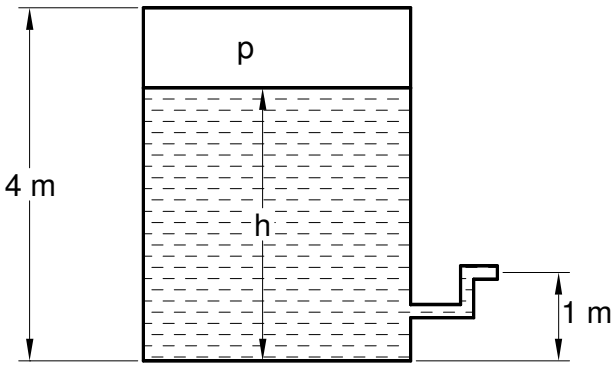
Srednje škole – 2. grupa

1. zadatak (8 bodova)
Za mjerenje duljine koristi se metalni metar čija duljina pri temperaturi 20°C iznosi 50 m. Jednog vrućeg ljetnog dana, kada je temperatura iznosila 35°C, s tim metrom mjerena je duljina lopatice turbine i dobivena je vrijednost 30.102 m. Kolika je prava duljina lopatice turbine na temperaturi 35°C? Koeficijent linearne termičke ekspanzije materijala od kojeg je napravljen metar je $2.4 \cdot 10^{-5}\ K^{-1}$.

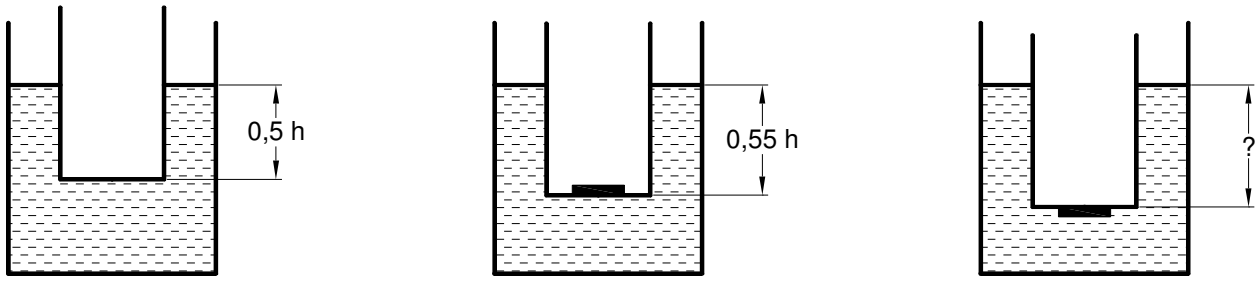
2. zadatak (12 bodova)
Na veliku cisternu pričvršćena je uska cijev kao na slici. Cisterna je napunjena vodom do visine h, zatvorena je na vrhu i termički izolirana. Između poklopca i površine vode nalazi se komprimirani zrak. Kada je visina vode u cisterni h=3.5 m, tlak zraka je $p=4.2 \cdot 10^5$ Pa. Atmosferski tlak je 10^5 Pa.
a) Izračunajte brzinu istjecanja vode kroz cijev kada je visina vode h=3.5 m
b) Kolika će biti visina vode u cisterni kada voda prestane istjecati kroz cijev?
Gustoća vode je 1000 kg/m^3.



3. zadatak (9 bodova)
U termički izoliranoj posudi nalaze se na temperaturi 0°C: 2.4 kg vode i 0.45 kg leda. Izlaz cijevi, koja izlazi iz bojlera u kojem ključa voda pri atmosferskom tlaku, uroni se u smjesu vode i leda u posudi. Koliko se vodene pare mora kondenzirati u posudi (pri atmosferskom tlaku) da bi konačna temperatura smjese u posudi iznosila 28°C? Prijenos topline na posudu je zanemariv.
Specifični toplinski kapacitet vode je 4186 J/(kgK), latentna toplina taljenja leda je $3.35 \cdot 10^5$ J/kg, a latentna toplina isparavanja vode je $2.256 \cdot 10^6$ J/kg.

4. zadatak (11 bodova)
Prazna posuda u obliku valjka, mase *M*, uronjena je u vodu tako da je pola visine h posude uronjeno u vodu, a ostatak je izvan vode (slika a)). Ako se bakreni novčić mase

m stavi u posudu, u vodi se nalazi 55% visine posude (slika b)). Koliki dio visine posude će biti uronjen u vodu ako taj isti novčić pričvrstimo za vanjsku stranu dna posude (slika c))? Gustoća vode je 1000 kg/m^3, a gustoća bakra je 8900 kg/m^3.



a) b) c)

5. zadatak (10 bodova)

Točkasto tijelo zanemarive mase nabijeno je nabojem q_1 = +0.1 μC i učvršćeno je u točki (x,y)=(1 cm , 0). Drugo točkasto tijelo zanemarive mase nabijeno je nabojem q_2 = +0.4 μC i učvršćeno je u točki (x,y)=(0, -2 cm). Ako se u ishodište koordinatnog sustava stavi točkasto tijelo zanemarive mase i naboja q_3 = +0.1 μC, izračunajte ukupnu silu koja djeluje na taj naboj q_3. Gdje i na koju udaljenost od naboja q_3 morate staviti točkasto tijelo zanemarive mase i naboja q_4 = -0.9 μC tako da naboj q_3 ostane mirovati i nakon što ga pustite da se giba? $k=9\cdot10^9$ Nm^{2}C^{-2}

Srednje škole – 2. skupina
Rješenja i smjernice za bodovanje

1. zadatak (8 bodova)

Zbog termičke ekspanzije duljina metalnog metra je na temperaturi 35°C veća za

$$\Delta l = \alpha l_0 \Delta T \quad \textbf{(1 bod)}$$

pa na toj temperaturi njegova duljina iznosi:

$$l = l_0(1+\alpha\cdot\Delta T) = 50\text{m}(1+2.4\cdot 10^{-5}K^{-1}15\text{K}) = 50.018\text{m} \quad \textbf{(2 boda)}$$

Rezultat mjerenja duljine lopatice dobiven s takvim metrom na 35°C je nešto manji od prave duljine lopatice (označimo je s *L*) na 35°C **(1 bod)** i vrijedi

$$\frac{50.018m}{50m} = \frac{L}{30.102m} \quad \textbf{(2 boda)}$$

Prava duljina lopatice turbine je $L = 30.11284m \approx 30.113m$ **(2 boda).**

Napomena: Još uvijek se po udžbenicima može naći izraz $l = l_0(1+\alpha t)$ gdje je l_0 duljina na 0^oC a t temperature u ^oC. Prihvatiti i takav način rješavanja pored gore navedenog.

2. zadatak (12 bodova)

a) Primjenom Bernullijevog teorema na gornju površinu vode (*v*, *h*) i otvor na cijevi kroz koji teče voda (v_1, h_1) dobivamo:

$$p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g h = p_{at} + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 \quad \textbf{(1 bod)}$$

Protok vode je stalan pa vrijedi $S_{cisterne} v = S_{cijevi} v_1$ i budući da je površina cisterne puno veća od površine otvora cijevi, brzina v je zanemarivo malena **(1 bod)** , pa dobivamo:

$$v_1^2 = \frac{2}{\rho}(p - p_{at} + \rho g(h - h_1))$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p - p_{at} + \rho g(h-h_1))} = \sqrt{\frac{2}{10^3\,\text{kg/m}^3}(4.2\cdot 10^5\,\text{Pa} - 10^5\,\text{Pa} + 10^3\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\cdot 9.81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot(3.5\text{m} - 1\text{m}))} = 26.25\text{m/s}$$

(2 boda)

b) Istjecanjem vode povećava se volumen zraka u cisterni iznad vode. Cisterna je termički izolirana, pa se povećavanjem volumena smanjuje tlak zraka. **(1 bod)**

U trenutku kada visina vode u cisterni iznosi *h*=3.5 m, volumen zraka u cisterni je

$$V = S_{cisterne}(4\text{m} - 3.5\text{m}) = S_{Cisterne}\,0.5\text{m}$$

U trenutku kada visina vode u cisterni iznosi h_2, volumen zraka u cisterni je

$$V_2 = S_{cisterne}(4\text{m} - h_2) \quad \textbf{(1 bod)}$$

Izotermnim povećavanjem volumena, smanjuje se tlak zraka u cisterni:

$$pV = p_2 V_2$$

Odnosno, tlak zraka pri volumenu V_2 je:

$$p_2 = pV / V_2 \qquad \textbf{(1 bod)}$$

Uvrstivši izraze za volumene dobiva se $p_2 = p\dfrac{0.5\text{m}}{(4\text{m} - \text{h}_2)}$. **(*)**

Primjenom Bernullijevog teorema na gornju površinu vode (v2, *h*2) i otvor na cijevi kroz koji teče voda (v_1, h_1) dobivamo:

$$p_2 + \frac{\rho v_2^{\,2}}{2} + \rho g h_2 = p_{at} + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1$$

U trenutku prestanka istjecanja vode brzine v_1 i v_2 su nula pa se, nakon uvrštavanja izraza za p_2 (*) u gornju relaciju, dobiva:

$$p\frac{0.5m}{(4m - h_2)} + \rho g h_2 = p_{at} + \rho g h_1 \qquad \textbf{(1 bod)}$$

$$p \cdot 0.5m + (4m - h_2)\rho g h_2 = (p_{at} + \rho g h_1)(4m - h_2)$$

Sređivanjem se dobije kvadratna jednadžba za h_2:

$$-\rho g (h_2)^2 + ((4m)\cdot g\rho + p_{at} + \rho g h_1)(h_2) + (p \cdot 0.5m - (4m)\cdot(p_{at} + \rho g h_1)) = 0$$

$$-10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} (h_2)^2 + ((4\text{m}) \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} + 10^5 \text{Pa} + 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} 1\text{m})(h_2) +$$

$$+ (4.2 \cdot 10^5 \text{Pa} \cdot 0.5\text{m} - (4\text{m}) \cdot (10^5 \text{Pa} + 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} 1\text{m})) = 0$$

$$-9810(h_2)^2 + 149050(h_2) - 229240 = 0 \qquad \textbf{(2 boda)}$$

Kvadratna jednadžba ima dva rješenja

$$h_2 = \frac{-149050 \pm 114980.54}{-2 \cdot 9810}\text{m}$$

(h_2=1.74 m i h_2=13.46 m) pri čemu rješenje h_2=13.46 m nema fizikalnog smisla. **(2 boda)**
Dakle, voda prestaje istjecati iz uske cijevi kada visina vode u cisterni iznosi 1.74 m.

3. zadatak (9 bodova)

Kondenziranjem vodene pare, mase m_P, oslobađa se toplina:

$$m_P \cdot 2256 \cdot 10^3 J / kg \qquad \textbf{(1 bod)}$$

Hlađenjem dobivene vode na 28°C oslobodi se toplina:

$$m_p c_V \Delta t = m_p 4186 \frac{J}{kgK}(100^o C - 28^o C) = m_p 301392 \frac{J}{K} \qquad \textbf{(1 bod)}$$

Dakle, ukupna oslobođena toplina iznosi $m_p(2256000 + 301392)\dfrac{J}{kg} = m_P 2557392 \dfrac{J}{kg}$ **(1 bod)**

Ta toplina se troši na:

1. zagrijavanje vode od 0°C do 28°C:

$$m_V c_V \Delta t = 2.4kg \cdot 4186 \frac{J}{kgK}(28^o C) = 281299.2J$$ **(1 bod)**

2. taljenje leda:

$$m_L 3.35 \cdot 10^5 \frac{J}{kg} = 0.45kg \cdot 3.35 \cdot 10^5 \frac{J}{kg} = 150750J$$ **(1 bod)**

3. zagrijavanje vode nastale taljenjem leda:

$$m_L c_V \Delta t = 0.45kg \cdot 4186 \frac{J}{kgK}(28^o C) = 52743.6J$$ **(1 bod)**

Dakle, ukupna potrošena toplina je $281299.2J + 150750J + 52743.6J = 484792.8J$ **(1 bod)**, pa je tražena masa vodene pare:

$$m_p = \frac{484792.8J}{2557392J/kg} = 0.189565kg \approx 190g$$ **(2 boda)**

4. zadatak (11 bodova)

Na slici a), kada je prazna posuda uronjena u vodu, sila uzgona na nju jednaka je njenoj težini:

$$\rho_V g \Delta V_1 = Mg$$ **(1 bod)**

pri čemu je volumen koji zauzima uronjeni dio posude $\Delta V_1 = 0.5hS$ (h je visina posude, a S je površina njenog dna), a ρ_V je gustoća vode. Dobiva se

$$Sh = \frac{2M}{\rho_V}$$ **(*) (1 bod)**

Kada je novčić u posudi sila uzgona jednaka je zbroju težina posude i novčića:

$$\rho_V g \Delta V_2 = Mg + mg$$ **(1 bod)**

pri čemu je $\Delta V_2 = 0.55hS$. Dobiva se

$$S0.55hg\rho_V = Mg + mg$$ **(1 bod)**

Uvrštavanjem izraza (*) u gornju relaciju dobiva se:

$$m = 0.1M \quad (**)$$ **(1 bod)**

Kada je novčić pričvršćen na vanjskoj strani dna posude vrijedi:

$$\rho_V g \Delta V_3 + \rho_V g V = Mg + mg$$ **(1 bod)**

pri čemu je $\Delta V_3 = xhS$ volumen koji u vodi zauzima posuda, a $V = m/\rho_{Cu}$ je volumen bakrenog novčića (ρ_{Cu} je gustoća bakra) pa vrijedi

$$\rho_V gxhS + \rho_V g\frac{m}{\rho_{Cu}} = Mg + mg \quad \textbf{(1 bod)}$$

Uvrštavanje izraza (*) i (**) u zadnje napisanu relaciju dobiva se jednadžba za x:

$$2Mx + 0.1M\frac{\rho_V}{\rho_{Cu}} = M + 0.1M$$

$$x = \frac{1.1 - 0.1\frac{\rho_v}{\rho_{Cu}}}{2} = 0.544$$

Dakle, u vodi će biti 0.544 visine valjka (ili 54.4% visine valjka). **(4 boda)**

5. zadatak (10 bodova)

Naboj q_3 udaljen je za $r_1 = 1$ cm od naboja q_1 *i za* za $r_2 = 2$ cm od naboja q_2.

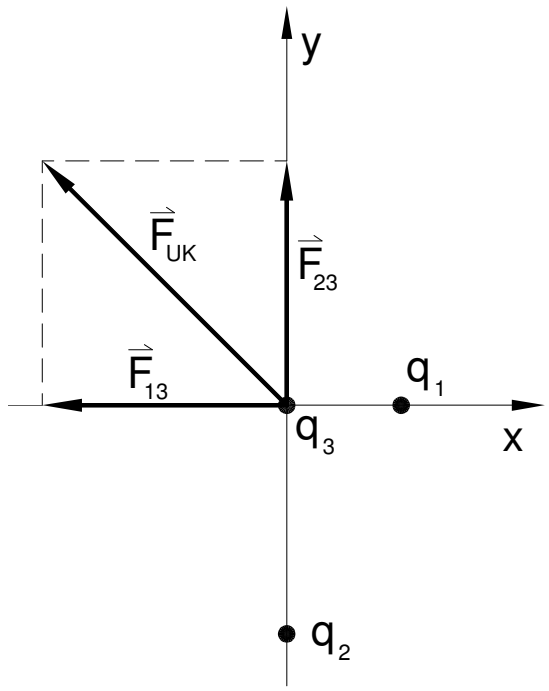
Svaki od naboja q_1 *i* q_2 djeluje na q_3 silom:

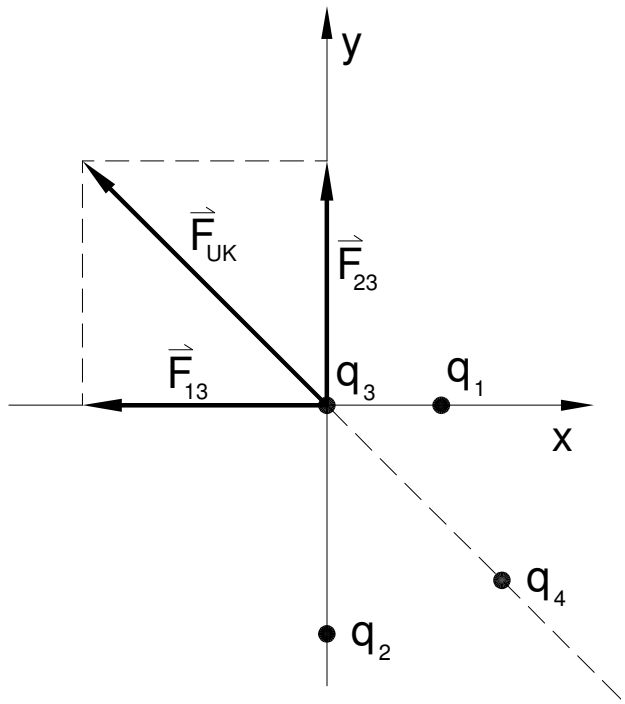
$$F_{i3} = k\frac{q_i q_3}{r_i^2} \quad \textbf{(1 bod)}$$

Dobiva se : F_{13}= 0.9 N, F_{23}= 0.9 N **(1 bod).**

Sile F_{13} i F_{23} su na okomitim pravcima pa je ukupna sila na q_3:

$$F_{uk} = \sqrt{F_{23}^2 + F_{13}^2} = 0.9\sqrt{2}\ \text{N} \quad \textbf{(2 boda)}$$





Ako ga pustimo, naboj q_3 će se početi gibati u smjeru sile F_{Uk}. Stoga treba naboj q_4 postaviti tako tako da sila kojom q_4 djeluje na q_3 bude jednakog iznosa i suprotnog smjera od sile F_{Uk} tj. da ukupna sila na q_3, nakon dodavanja naboja q_4, bude nula **(2 boda)**.

$$F_{43} = k\frac{q_4 q_3}{r_4^{\,2}} = 0.9\sqrt{2}\mathrm{N} \qquad \textbf{(1 bod)}$$

$$9\cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}\,\frac{(0.9\cdot 10^{-6}C)\cdot(0.1\cdot 10^{-6}C)}{r_4^{\,2}} = 0.9\sqrt{2}\mathrm{N}$$

Za udaljenost naboja q_3 *i* q_4 dobiva se: $r_4 = 0.03/\sqrt[4]{2}\ \mathrm{m} \approx 0.025\,\mathrm{m}$ (**1 bod**).

q_4 treba postaviti u točku $(\frac{0.025\sqrt{2}}{2}\ \mathrm{m}, -\frac{0.025\sqrt{2}}{2}\ \mathrm{m})$ **(2 boda)**