18. TERMIČKO RASTEZANJE ČVRSTIH TIJELA I TEKUĆINA (3.53. - 3.72.)

3.53. Metalna šipka ima duljinu l_t pri temperaturi t. a) Kolika je njezina duljina l_0 pri 0 ^{0}C? b) Kolika je njezina duljina $l_{t'}$ pri t'? Linearni je koeficijent rastezanja β.

l_t, t, β
t = 0 [^{0}C], l_0 = ?
t´, $l_{t'}$ = ?

$$l = l_0 \cdot (1+\beta \cdot t)$$

$$l_t = l_0 \cdot (1+\beta \cdot t) \Rightarrow l_0 = \frac{l_t}{1+\beta \cdot t}$$

$$l_t' = l_0 \cdot (1+\beta \cdot t') = \frac{l_t}{1+\beta \cdot t} \cdot (1+\beta \cdot t') = \frac{l_t \cdot (1+\beta \cdot t')}{1+\beta \cdot t}$$

3.54. Štap od platine dugačak je pri 20 ^{0}C 998 mm. Pri kojoj će temperaturi štap biti dugačak 1 m?

t_1 = 20 ^{0}C
l_0 = 998 mm
l = 1 m
t_2 = ?

$$l = l_0 \cdot (1+\beta \cdot \Delta t)$$

$$l_t = l_0 \cdot + l_0 \cdot \beta \cdot \Delta t$$

$$l - l_0 = l_0 \cdot \beta \cdot \Delta t$$

$$\Delta t = \frac{l - l_0}{l_0 \cdot \beta}$$

$$\Delta t = \frac{1 - 0{,}998}{0{,}998 \cdot 0{,}9 \cdot 10^{-5}} = 224{,}46^0 C$$

$$t_2 = t_1 + \Delta t = 20 + 224{,}46 = 244{,}46^0 C$$

3.55. Na drveni kotač promjera 100 cm treba staviti željezni obruč kojega je promjer 5 mm manji od promjera kotača. Za koliko stupnjeva treba povisiti temperaturu željeznom obruču?

d_0 = 100 cm = 1 m
d_1 = 99,5 cm = 0,995 m
Δt = ?

$$d_1 = d_0 \cdot (1+\beta \cdot \Delta t)$$

$$d_1 = d_0 + d_0 \cdot \beta \cdot \Delta t$$

$$\Delta t = \frac{d_1 - d_0}{d_0 \cdot \beta} = \frac{1 - 0{,}995}{1 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-5}} = 416{,}6\left[^0 C\right]$$

3.56. Čelični valjak ima promjer 10,000 cm pri 30 ^{0}C. Pri kojoj će temperaturi taj valjak točno pristajati u rupu promjera 9,997 cm?

d_0 = 10,000 cm = 0,1 m
t_1 = 30 ^{0}C
d_1 = 9,997 cm = 0,09997 m
t_2 = ?

$$d_1 = d_0 \cdot (1+\beta \cdot \Delta t)$$

$$d_1 = d_0 + d_0 \cdot \beta \cdot \Delta t$$

$$\Delta t = \frac{d_1 - d_0}{d_0 \cdot \beta} = \frac{0{,}09997 - 0{,}1}{0{,}1 \cdot 1{,}1 \cdot 10^{-5}} = -27{,}27\left[^0 C\right]$$

$$t_2 = t_1 + \Delta t = 30 - 27{,}27 = 2{,}72\left[^0 C\right]$$

3.57. Štap od cinka i štap od željeza imaju pri 0 ^{0}C jednaku duljinu l_0 = 1 m. Kolika je razlika duljina štapova pri 200 ^{0}C?

t = 0 ^{0}C
$l_{željeza} = l_{cinka} = l_0$ = 1 m
t_1 = 200 ^{0}C
Δl = ?

željezo:

$$l = l_0 \cdot (1 + \beta \cdot \Delta t)$$
$$l = 1 \cdot (1 + 1{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot 200)$$
$$l = 1{,}0024[m]$$

cink:

$$l = l_0 \cdot (1 + \beta \cdot \Delta t)$$
$$l = 1 \cdot (1 + 2{,}9 \cdot 10^{-5} \cdot 200)$$
$$l = 1{,}0058[m]$$

$$\Delta l = 1{,}0058 - 1{,}0024 = 0{,}0034[m]$$

3.58. Pri 0 ^{0}C promatramo željeznu tračnicu na duljini 1 km. Za koliko će se ta duljina promijeniti kad se tračnica ugrije od -10 ^{0}C do 30 ^{0}C?

t = 0 ^{0}C
l_0 = 1 km = 1000 m
t_1 = -10 ^{0}C
t_2 = 30 ^{0}C
Δl = ?

duljina na -10 ^{0}C:

$$l = l_0 \cdot (1 + \beta \cdot \Delta t)$$
$$l = 1000 \cdot (1 + 1{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot (-10))$$
$$l = 999{,}88[m]$$

duljina na +30 ^{0}C:

$$l = l_0 \cdot (1 + \beta \cdot \Delta t)$$
$$l = 1000 \cdot (1 + 1{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot 30)$$
$$l = 1000{,}36[m]$$

$$\Delta l = 1000{,}36 - 999{,}88 = 0{,}48[m]$$

3.59. Eiffelov toranj visok je 300 m pri 0 ^{0}C. Pri kojoj će temperaturi biti 10 cm duži, odnosno viši?

l_0 = 300 m
t = 0 ^{0}C
l = 300,1 m
Δt = ?

$$l = l_0 \cdot (1 + \beta \cdot \Delta t)$$
$$l_t = l_0 \cdot + l_0 \cdot \beta \cdot \Delta t$$
$$l - l_0 = l_0 \cdot \beta \cdot \Delta t$$
$$\Delta t = \frac{l - l_0}{l_0 \cdot \beta}$$
$$\Delta t = \frac{300{,}1 - 300}{300 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-5}} = 27{,}77^0 C$$

3.60. Sekundna njihalica (izrađena od mjedi) pokazuje točno vrijeme pri 0 ^{0}C. Koliko zaostane njihalica u jednom danu ako je temperatura 30 ^{0}C?

T = 1 [s]
t_1 = 0 ^{0}C
t_2 = 30 ^{0}C
Δt = ?

$$t_1 = 0^0 C$$
$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_0}{g}}$$
$$1 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot \sqrt{\frac{l_0}{9{,}81}}$$
$$l_0 = \frac{9{,}81}{39{,}43} = 0{,}248795[m]$$

$$t_2 = 30^0 C$$
$$l = l_0 \cdot (1 + \beta \cdot \Delta t)$$
$$l = 0{,}248795 \cdot (1 + 1{,}7 \cdot 10^{-5} \cdot 30)$$
$$l = 0{,}248922[m]$$
$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} = 2 \cdot 3{,}14 \cdot \sqrt{\frac{0{,}248922}{9{,}81}}$$
$$T = 1{,}000361[s]$$
$$\Delta T = 1{,}000361 - 1 = 0{,}000361[s]$$
u jednom danu:
$$\Delta T_1 = \Delta T \cdot 24 \cdot 3600 = 0{,}000361 \cdot 86400 = 31{,}196[s]$$

3.61. Kotač lokomotive ima pri 0 ^{0}C polumjer r_0 = 80 cm. Koliko okreta manje na putu dugome 200 km učini taj kotač ljeti pri temperaturi 20 ^{0}C nego zimi pri -20 ^{0}C?

t = 0 ^{0}C
r_0 = 80 cm = 0,8 m
s = 200 km
t_1 = -20 ^{0}C
t_2 = 20^{0}C
Δn = ?

$t = 0^0 C$ $\quad o_0 = 2 \cdot r_0 \cdot \pi$ $\quad o_0 = 2 \cdot 0{,}8 \cdot 3{,}14$ $\quad o_0 = 5{,}024[m]$

$t_1 = -20^0 C$ $\quad o = o_0 \cdot (1 + \beta \cdot \Delta t)$ $\quad o = 5{,}024 \cdot (1 + 1{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot (-20))$ $\quad o = 5{,}02279[m]$

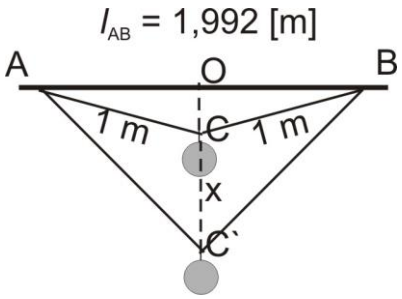
$t_2 = 20^0 C$ $\quad o = o_0 \cdot (1 + \beta \cdot \Delta t)$ $\quad o = 5{,}024 \cdot (1 + 1{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot (20))$ $\quad o = 5{,}0252[m]$

$$n = \frac{s}{o} = \frac{200000}{5{,}02279} = 39818{,}5 \text{ okretaja} \qquad n = \frac{s}{o} = \frac{200000}{5{,}0252} = 39799{,}4 \text{ okretaja}$$

$$\Delta n = 39818{,}5 - 39799{,}4 = 19 \text{ okretaja}$$

3.62. Mjedena žica duga je pri 0 ^{0}C 2m. Žica je svojim krajevima pričvršćena na točke A i B koje se nalaze u međusobnoj horizontalnoj udaljenosti 1,992 m. U sredini žice visi uteg P. Za koliko treba povisiti temperaturu žice da se uteg spusti za duljinu koja je jednaka peterostrukom produljenju žice?

t = 0 ^{0}C
l_0 = 2 m
l_{AB} = 1,992 m
x = 5Δl = 5$l_0\Delta$t
Δt = ?



$$x = 5 \cdot l_0 \cdot \beta \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{x}{5 \cdot l_0 \cdot \beta}$$

$$\overline{CC'} = x = \overline{OC'} - \overline{OC}$$

$$\overline{OC} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2}$$

$$\overline{OC} = \sqrt{\left(\frac{l_0}{2}\right)^2 - \left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2}$$

$$\overline{OC} = \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - \left(\frac{1{,}992}{2}\right)^2}$$

$$\overline{OC} = 0{,}0894[m]$$

$$\overline{OC'} = \sqrt{\overline{AC'}^2 - \left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2}$$

$$\overline{OC'} = \sqrt{\left(\frac{l_t}{2}\right)^2 - \left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2}$$

$$\overline{OC'} = \sqrt{\left(\frac{l_0 \cdot \beta \cdot \Delta t}{2}\right)^2 - \left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2}$$

$$\overline{OC'} = \sqrt{\left(\frac{2 \cdot 1{,}7 \cdot 10^{-5} \cdot \Delta t}{2}\right)^2 - \left(\frac{1{,}992}{2}\right)^2}$$

$$\overline{OC'} = \sqrt{(1{,}7 \cdot 10^{-5} \cdot \Delta t)^2 - (0{,}996)^2}$$

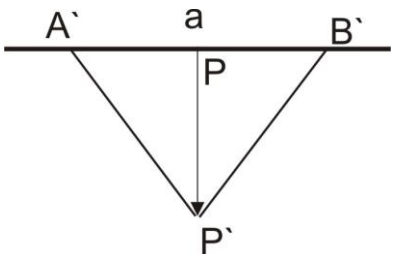
$$\overline{OC'} = \sqrt{2{,}89 \cdot 10^{-10} \cdot \Delta t^2 - 0{,}99}$$

$$x = \overline{OC'} - \overline{OC} = \sqrt{2{,}89 \cdot 10^{-10} \cdot \Delta t^2 - 0{,}99} - 0{,}0894$$

$$\Delta t = \frac{x}{5 \cdot l_0 \cdot \beta} = \frac{\sqrt{2{,}89 \cdot 10^{-10} \cdot \Delta t^2 - 0{,}99} - 0{,}0894}{5 \cdot 2 \cdot 1{,}7 \cdot 10^{-5}}$$

3.63. Na horizontalnoj ploči od lijevana željeza pričvršćena su dva štapića A i B. Njihova međusobna udaljenost pri 0 ^{0}C iznosi a = 10 cm. Na štapiće A i B privarena je mjedena žica. U sredini žice (P) obješen je uteg p. Prije zagrijavanja žica je napeta. a) Izrazi vertikalni pomak točke P kao funkciju temperature t. b) Izračunaj pomak točke P za temperaturu 50 ^{0}C.

a = 10 [cm] = 0,1 [m]
P = f(t)
t = 50 ^{0}C
PP` = ?



ploča: $\overline{A'B'} = a \cdot (1+\beta_1 \cdot t)$

žica: $l = a \cdot (1+\beta_2 \cdot t)$

$$\overline{PP'}^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 - \left(\frac{\overline{A'B'}}{2}\right)^2$$

$$\overline{PP'}^2 = \frac{(a \cdot (1+\beta_2 \cdot t))^2}{2} - \frac{(a \cdot (1+\beta_1 \cdot t))^2}{2}$$

$$\overline{PP'}^2 = \frac{a^2}{4} \cdot \left[(1+\beta_2 \cdot t)^2 - (1+\beta_1 \cdot t)^2\right]$$

$$\overline{PP'}^2 = \frac{a^2}{4} \cdot \left[1+2\beta_2 t+\beta_2^2 t^2 - 1 - 2\beta_1 t + \beta_1^2 t^2\right]$$

$$\overline{PP'}^2 = \frac{a^2}{4} \cdot \left[2t \cdot (\beta_2 - \beta_1)\right]$$

$$\overline{PP'} = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{2t \cdot (\beta_2 - \beta_1)}$$

$$\overline{PP'} = \frac{0{,}1^2}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot 50 \cdot (1{,}7 \cdot 10^{-5} - 1{,}2 \cdot 10^{-5})} = 0{,}0011[m] = 0{,}11[cm]$$

3.64. Staklena boca ima obujam 2000 cm^3 pri 0 0C. Pri 0 ^{0}C boca je do ruba napunjena alkoholom. Koliko će alkohola izaći iz boce kad je ugrijemo na 50 ^{0}C?

V = 2000 cm^3 = 2 [l]
t_1 = 0^0 C
t_2 = 50^0 C
ΔV = ?

staklo:
$V = V_0 \cdot (1+\gamma \cdot \Delta t)$
$V = 2 \cdot (1+3 \cdot 0{,}9 \cdot 10^{-5} \cdot 50)$
$V = 2{,}0027[l]$

alkohol:
$V = V_0 \cdot (1+\gamma \cdot \Delta t)$
$V = 2 \cdot (1+1{,}135 \cdot 10^{-3} \cdot 50)$
$V = 2{,}1135[l]$

$$\Delta V = 2{,}1135 - 2{,}0027 = 0{,}11[l]$$

3.65. Bakrena kocka ima pri 0 ^{0}C brid a = 5 cm. a) Pri kojoj će temperaturi njezin obujam biti 126,00 cm^3? b) Koliki je njezin obujam pri 200 ^{0}C?

t = 0 ^{0}C
a = 5 cm
V = 126 cm^3
a) t_1 = ?

t_2 = 200 ^{0}C
b) V = ?

a)

$$V_0 = a^3 = 125\left[cm^3\right]$$

$$V = V_0 \cdot (1+\gamma \cdot \Delta t)$$

$$\Delta t = \frac{V - V_0}{\gamma \cdot V_0}$$

$$\Delta t = \frac{126-125}{3 \cdot 1{,}7 \cdot 10^{-5} \cdot 125} = 156{,}8^0 C$$

$$t_1 = 0 + 156{,}8 = 156{,}8^0 C$$

b)

$$V = V_0 \cdot (1+\gamma \cdot \Delta t)$$

$$V = 125 \cdot (1 + 3 \cdot 1{,}7 \cdot 10^{-5} \cdot 200)$$

$$V = 126{,}275\left[cm^3\right]$$

3.66. Tijelo ima pri 0 ^{0}C obujam V_0 i gustoću ρ_0. a) kolika je njegova masa? b) Tijelo ugrijemo do t_1. Koliki su njegov obujam V_1 i gustoća ρ_1? Kubični koeficijent rastezanja je α. c) Tijelo se ugrije do temperature t_2. Koliki su njegov obujam V_2 i gustoća ρ_2? Pokaži da za dobivene rezultate vrijedi relacija $V_1/V_2 = \rho_2/\rho_1$. Kakvo fizikalno svojstvo objašnjava ta relacija?

t = 0 ^{0}C
a) V_0, ρ_0
m = ?
b) t_1, α
V_1 = ?, ρ_1 = ?
c) t_2
V_2 = ?, ρ_2 = ?

a)

$$m = \rho_0 \cdot V_0$$

b)

$$V_1 = V_0 \cdot (1+\alpha \cdot t_1)$$

$$\rho_1 = \frac{m}{V_1} = \frac{\rho_0 \cdot V_0}{V_0 \cdot (1+\alpha \cdot t_1)} = \frac{\rho_0}{1+\alpha \cdot t_1}$$

c)

$$V_2 = V_0 \cdot (1+\alpha \cdot t_2)$$

$$\rho_2 = \frac{m}{V_2} = \frac{\rho_0 \cdot V_0}{V_0 \cdot (1+\alpha \cdot t_2)} = \frac{\rho_0}{1+\alpha \cdot t_2}$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{m}{\rho_1}}{\frac{m}{\rho_2}} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

3.67. Gustoća je žive pri 0 ^{0}C 13,60 g/ cm^3. Odredi gustoću žive pri 60 ^{0}C.

t_0 = 0 ^{0}C
$\rho_{0\ živa}$ = 13,6 g/cm^3
t_1 = 60 ^{0}C
ρ_1 = ?

$$\rho_0 = \frac{m}{V_0}$$

$$V_1 = V_0 \cdot (1+\alpha \cdot t_1)$$

$$\rho_1 = \frac{m}{V_1} = \frac{\rho_0 \cdot V_0}{V_0 \cdot (1+\alpha \cdot t_1)} = \frac{\rho_0}{1+\alpha \cdot t_1}$$

$$\rho_1 = \frac{13600}{1 + 1{,}18 \cdot 10^{-3} \cdot 60} = 12700\ \frac{kg}{m^3} = 12{,}7\ \frac{g}{cm^3}$$

3.68. U staklenu tikvicu pri 0 ^{0}C možemo smjestiti m_0 = 100 g žive. Pri 20 ^{0}C u tikvicu stane m_{20} = 99,7 g žive. U oba slučaja temperatura žive jednaka je temperaturi tikvice. Nađi koeficijent linearnog rastezanja stakla β.

$t_0 = 0\ ^0C$
$m_0 = 100\ g = 0{,}1\ kg$
$t = 20\ ^0C$
$m_t = 99{,}7\ g = 0{,}0997\ kg$
$\beta_{stakla} = ?$

tikvica i živa :

$$V_t = V_0 \cdot (1+\alpha \cdot t)$$

živa:

$$V_t = \frac{m_t}{\rho_t} \qquad V_0 = \frac{m_0}{\rho_0} \qquad \rho_t = \frac{\rho_0}{1+\alpha_1 \cdot t_1}$$

$$\frac{m_t}{\rho_t} = \frac{m_0}{\rho_0} \cdot (1+\alpha \cdot \mathrm{t})$$

$$\frac{\frac{m_t}{\rho_0}}{1+\alpha_1 \cdot t_1} = \frac{m_0}{\rho_0} \cdot (1+\alpha \cdot \mathrm{t})$$

$$m_t \cdot (1+\alpha_1 \cdot t_1) = m_0 \cdot (1+\alpha \cdot \mathrm{t})$$

$$\alpha = \frac{m_t \cdot (1+\alpha_1 \cdot t_1) - m_0}{m_0 \cdot t}$$

$$\alpha = \frac{0{,}0997 \cdot \left(1+1{,}18 \cdot 10^{-3} \cdot 20\right) - 0{,}1}{0{,}1 \cdot 20}$$

$$\alpha = 0{,}001\left[K^{-1}\right]$$

$$\beta = \frac{\alpha}{3} = \frac{0{,}001}{3} = 0{,}000342\left[K^{-1}\right]$$

3.69. Gustoća je zlata pri 20 ^{0}C 19,30 g/ cm^3. Nađi gustoću zlata pri 90 ^{0}C.

$\rho_{20\ zlato} = 19{,}3\ [g/\ cm^3]$
$\rho_{90} = ?$

$$\rho_{20} = \frac{m}{V_{20}} \Rightarrow V_{20} = \frac{m}{\rho_{20}}$$

$$V_{90} = V_{20} \cdot (1+\alpha \cdot \Delta t)$$

$$V_{90} = \frac{m}{\rho_{20}} \cdot (1+\alpha \cdot \Delta t)$$

$$\rho_{90} = \frac{m}{V_{90}} = \frac{m}{\frac{m}{\rho_{20}} \cdot (1+\alpha \cdot \Delta t)} = \frac{\rho_{20}}{1+\alpha \cdot \Delta t} = \frac{19300}{1+3 \cdot 1{,}4 \cdot 10^{-5} \cdot 70} = 19243\left[\frac{kg}{m^3}\right]$$

3.70. Petrolej se na skladištu nalazi u cilindričnoj bačvi polumjera 4 m i visine 6 m. Pri -10 ^{0}C površina petroleja nalazi se 10 cm ispod gornjeg ruba bačve. Koliko se petroleja izlije iz bačve kad temperatura naraste na 35 ^{0}C? Rastezanje bačve zanemarimo.

$r = 4\ [m]$
$h = 6\ [m]$
$t_1 = -10\ ^0C$
$\Delta h_1 = 0{,}1\ [m]$
$t_2 = 35\ ^0C$
$\Delta h_2 = ?$

bačva:

$$V = A \cdot h$$
$$V = r^2 \cdot \pi \cdot h$$
$$V = 4^2 \cdot \pi \cdot 6$$
$$V = 301{,}44\left[m^3\right]$$

petrolej:

$$V = A \cdot (h - \Delta h)$$
$$V = r^2 \cdot \pi \cdot 5{,}9$$
$$V = 4^2 \cdot \pi \cdot 5{,}9$$
$$V = 296{,}42\left[m^3\right]$$

$$V = V_0 \cdot (1+\alpha \cdot \Delta t)$$
$$V = 296{,}42 \cdot (1+10^{-3} \cdot 45)$$
$$V = 309{,}76\left[m^3\right]$$
$$\Delta V = 309{,}76 - 301{,}44 = 8{,}32\left[m^3\right]$$

3.71. Na kraju kapilare od kremena, unutarnjeg promjera d = 2 mm, ispuhana je kugla unutarnjeg promjera D = 2 cm. Pri 15 ^{0}C kugla je upravo napunjena živom. Za koju će se visinu h živa dignuti u kapilari ako se ugrije na 25 ^{0}C? Koeficijent kubičnog rastezanja kremena možemo zanemariti.

d = 2 mm
D = 2 cm
t_1 = 15 ^{0}C
t_2 = 25 ^{0}C
Δh = ?

kugla:

$$V = \frac{4}{3}\cdot r^3\cdot\pi$$
$$V = \frac{4}{3}\cdot 0{,}01^3\cdot\pi$$
$$V = 4{,}186\cdot 10^{-6}\left[m^3\right]$$

cijev:

$$A = \frac{d^2\cdot\pi}{4}$$
$$A = \frac{\left(2\cdot 10^{-3}\right)^2\cdot\pi}{4} = 3{,}14\cdot 10^{-6}\left[m^2\right]$$

živa:

$$V = V_0\cdot(1+\alpha\cdot\Delta t)$$
$$V = 4{,}186\cdot 10^{-6}\cdot(1+1{,}18\cdot 10^{-3}\cdot 10) = 4{,}235\cdot 10^{-6}\left[m^3\right]$$

$$\Delta V = (4{,}235-4{,}186)\cdot 10^{-6} = 4{,}939\cdot 10^{-8}\left[m^3\right]$$

$$\Delta V = A\cdot h$$
$$h = \frac{\Delta V}{A} = \frac{4{,}939\cdot 10^{-8}}{3{,}14\cdot 10^{-6}} = 0{,}0157[m]$$

3.72. Na slici 3.3 grafički je prikaz ovisnosti produljenja žice o temperaturi. Odredi koeficijent linearnog rastezanja ako je početna duljina žice 100 m.

l_0 = 100 [m]
β = ?

$$l = l_0\cdot(1+\beta\cdot\Delta t)$$
$$l = l_0 + l_0\cdot\beta\cdot\Delta t$$
$$l_0\cdot\beta\cdot\Delta t = l - l_0$$
$$\beta = \frac{l-l_0}{l_0\cdot\Delta t} = \frac{\Delta l}{l_0\cdot\Delta t}$$
$$\beta = \frac{2\cdot 10^{-3}}{100\cdot 2} = 10^{-5}\left[K^{-1}\right]$$