14. OPĆI ZAKON GRAVITACIJE (1.375. - 1. 402.)

1.375. Uporabom jednoga od uređaja za provjeravanje gravitacijske sile izmjereno je da se olovna kugla mase 5 kg i kuglica mase 10 g na udaljenosti 7 cm privlače silom $6{,}13 \times 10^{-10}$ N. Kolika je gravitacijska konstanta kad je izračunamo iz tih pokusnih podataka?

$m_1 = 5$ kg
$m_2 = 10$ g $= 0{,}01$ kg
$r = 7$ cm $= 0{,}07$ m
$F = 6{,}13 \times 10^{-10}$ N
$G = ?$

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$
$$G = \frac{F \cdot r^2}{m_1 \cdot m_2}$$
$$G = \frac{6{,}13 \cdot 10^{-10} \cdot 0{,}07^2}{5 \cdot 0{,}01}$$
$$G = 6 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$$

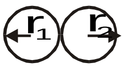
1.376. Koliko se privlače dvije lađe svaka mase 10^7 kg kad se nalaze na udaljenosti 1 km?

$m_1 = m_2 = 10^7$ kg
$r = 1$ km $= 1000$ m
$F = ?$

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$
$$F = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{(10^7)^2}{1000^2}$$
$$F = 0{,}00667\,[N] = 6{,}67 \cdot 10^{-3}\,[N]$$

1.377. Kolikom se silom privlače dvije aluminijske kugle polumjera 0,5 m koje se dodiruju?

$r_1 = r_2 = 0{,}5$ m
$\rho = 2700$ kg/m^3
$F = ?$



$r = r_1 + r_2$
$r = 0{,}5 + 0{,}5$
$r = 1$ m

$$m_1 = m_2 = \rho \cdot V = \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$$
$$m = 2700 \cdot \frac{4}{3} \cdot 0{,}5^3 \cdot \pi$$
$$m = 1413{,}7\ kg$$

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$
$$F = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1413{,}7^2}{1^2}$$
$$F = 1{,}3 \cdot 10^{-4}\ N$$

1.378. Kolika je privlačna sila između dva neutrona koji su udaljeni 10^{-10} m jedan od drugoga?

$r = 10^{-10}$ m
$m = 1{,}675 \times 10^{-27}$ kg
$F = ?$

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$
$$F = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{(1{,}675 \cdot 10^{-27})^2}{(10^{-10})^2}$$
$$F = 1{,}87 \cdot 10^{-44}\ N$$

1.379. Masa Zemlje je 6×10^{24} kg, a masa Mjeseca $7{,}3 \times 10^{22}$ kg. Udaljenost između njihovih središta jest 384000 km. Kolikom se silom privlače Zemlja i Mjesec?

$m_1 = 6 \times 10^{24}$ kg
$m_2 = 7{,}3 \times 10^{22}$ kg
$r = 384000$ km

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$
$$F = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{6 \cdot 10^{24} \cdot 7{,}3 \cdot 10^{22}}{384000000^2}$$
$$F = 1{,}98 \cdot 10^{20}\ N$$

1.380. Za koliko se puta smanji težina nekog tijela kada ga donesemo na vrh planine visoke 2400 metara?

$h = 2400$ m

$\frac{F_2}{F_1} = ?$

$$F_1 = G \cdot \frac{m_Z \cdot m}{r_Z^2}$$

$$F_2 = G \cdot \frac{m_Z \cdot m}{(r_Z + h)^2}$$

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{G \cdot \frac{m_Z \cdot m}{(r_Z + h)^2}}{G \cdot \frac{m_Z \cdot m}{r_Z^2}}$$

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{r_Z^2}{(r_Z + h)^2}$$

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{6370000^2}{(6370000 + 2400)^2}$$

$$\frac{F_2}{F_1} = 0{,}999$$

$$F_2 = 99{,}9\%\, F_1$$

1.381. Koliko put postane tijelo mase 1 kg lakše ako ga dignemo 1 km uvis? Polumjer Zemlje je R = 6367 km te uzmimo $g = 9{,}81\ m/s^2$.

$m = 1$ kg

$h = 1$ km

$r = 6367$ km

$g = 9{,}81\ m/s^2$

$\frac{F_2}{F_1} = ?$

$$F_1 = G \cdot \frac{m_Z \cdot m}{r_Z^2}$$

$$F_2 = G \cdot \frac{m_Z \cdot m}{(r_Z + h)^2}$$

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{G \cdot \frac{m_Z \cdot m}{(r_Z + h)^2}}{G \cdot \frac{m_Z \cdot m}{r_Z^2}}$$

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{r_Z^2}{(r_Z + h)^2}$$

$$F_1 = m \cdot g_1$$

$$F_2 = m \cdot g_2$$

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{m \cdot g_2}{m \cdot g_1} = \frac{g_2}{g_1}$$

$$\frac{g_2}{g_1} = \frac{r_Z^2}{(r_Z + h)^2}$$

$$\frac{g_2}{g_1} = \frac{6367000^2}{(6367000 + 1000)^2}$$

$$\frac{g_2}{g_1} = 0{,}999$$

$$g_2 = 99{,}9\%\, g_1$$

1.382. Kolika je akceleracija Zemljine sile teže na udaljenosti iznad površine Zemlje koja je jednaka njezinu polumjeru? Koliki je put što ga u prvoj sekundi prijeđe tijelo padajući slobodno na toj visini? Za polumjer Zemlje možemo uzeti R = 6400 km.

$h = r_Z$

$r_Z = 6400$ km

$g = ?,\ s = ?$

$$F = G \cdot \frac{m \cdot m_Z}{(r_Z + h)^2}$$

$$m \cdot g = G \cdot \frac{m \cdot m_Z}{(r_Z + h)^2}$$

$$g = G \cdot \frac{m_Z}{(2 \cdot r_Z)^2}$$

$$g = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{6 \cdot 10^{24}}{(2 \cdot 6400000)^2}$$

$$g = 2{,}44\ \frac{m}{s^2}$$

$$s = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

$$s = \frac{1}{2} \cdot 2{,}44 \cdot 1^2$$

$$s = 1{,}22\ m$$

1.383. Na kojoj se visini od površine Zemlje mora nalaziti neko tijelo da mu težina bude dva puta manja od težine na površini Zemlje?

$$G_2 = \frac{1}{2} \cdot G_1$$

$$h = ?$$

$$G_2 = \frac{1}{2} \cdot G_1$$

$$G \cdot \frac{m \cdot m_Z}{(r_Z + h)^2} = \frac{1}{2} \cdot G \cdot \frac{m \cdot m_Z}{r_Z^2}$$

$$\frac{1}{(r_Z + h)^2} = \frac{1}{2 \cdot r_Z^2}$$

$$2 \cdot r_Z^2 = (r_Z + h)^2$$

$$h^2 + 2 \cdot r_Z \cdot h - r_Z^2 = 0$$

$$h_{1,2} = \frac{-2 \cdot r_Z \pm \sqrt{4 \cdot r_Z^2 + 4 \cdot r_Z^2}}{2}$$

$$h_{1,2} = \frac{-2 \cdot 6400000 \pm \sqrt{8 \cdot 6400000^2}}{2}$$

$$h = 2651\,\text{km}$$

1.384. Kolikom silom Mjesec privlači uteg mase 1 kg koji se nalazi na njegovoj površini ako znamo da je polumjer Mjeseca $1{,}7 \times 10^6$ m, a masa $7{,}3 \times 10^{22}$ kg?

$m = 1$ kg
$r_m = 1{,}7 \times 10^6$ kg
$m_m = 7{,}3 \times 10^{22}$ kg
$F = ?$

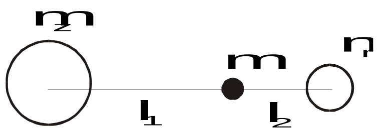
$$F = G \cdot \frac{m \cdot m_m}{r_m^{\ 2}}$$

$$F = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1 \cdot 7{,}3 \cdot 10^{22}}{(1{,}7 \cdot 10^6)^2}$$

$$F = 1{,}68\,\text{N}$$

1.385. Na dužini koja spaja Zemlju i Mjesec odredi točku u kojoj su sile privlačenja Zemlje i Mjeseca jednake. Udaljenost između Zemlje i Mjeseca jest 60 Zemljinih polumjera, a Zemljina je masa 81 puta veća od Mjesečeve mase.

$d = 60\ R_Z$
$m_Z = 81\ m_m$
$F_Z = F_M$
$l = ?$



$$d = l_1 + l_2$$

$$l_2 = d - l_1$$

$$l_2 = 60 \cdot R_Z - l_1$$

$$G \cdot \frac{m \cdot m_z}{l_1^2} = G \cdot \frac{m \cdot m_m}{l_2^2}$$

$$\frac{m_z}{l_1^2} = \frac{m_m}{l_2^2}$$

$$\frac{81 \cdot m_m}{l_1^2} = \frac{m_m}{(60 \cdot R_Z - l_1)^2}$$

$$81 \cdot (60 \cdot R_Z - l_1)^2 = l_1^2$$

$$9 \cdot (60 \cdot R_Z - l_1) = l_1$$

$$l_1 = 54 \cdot R_Z$$

1.386. Znajući da su staze Zemlje i Mjeseca približno kružnice, odredi odnos masa Sunca i Zemlje. Poznato je da Mjesec u jednoj godini 13 puta obiđe Zemlju i da je udaljenost Sunca od Zemlje 390 puta veća nego udaljenost Mjeseca od Zemlje.

$T_Z = 13\ T_M$
$R_Z = 390\ R_M$
$\frac{m_s}{m_z} = ?$

$$F_{CP} = F_G$$

$$\frac{m \cdot v^2}{r} = G \cdot \frac{m_z \cdot m_s}{r^2}$$

$$\frac{m \cdot v^2}{r} = G \cdot \frac{m_m \cdot m_z}{r^2}$$

$$\frac{G \cdot \frac{m_z \cdot m_s}{r^2}}{G \cdot \frac{m_m \cdot m_z}{r^2}} = \frac{\frac{4 \cdot r_z \cdot \pi \cdot m_z}{T_z^2}}{\frac{4 \cdot r_m \cdot \pi \cdot m_m}{T_m^2}}$$

$$\frac{m_s}{m_z} = \frac{r_z^3 \cdot T_m^2}{r_m^3 \cdot T_z^2}$$

$$\frac{m_s}{m_z} = \frac{390^3 \cdot r_m^3 \cdot T_m^2}{r_m^3 \cdot 13^2 \cdot T_m^2}$$

$$\frac{m_s}{m_z} = \frac{390^3}{13^2} = 3{,}51 \cdot 10^5$$

1.387. Kolika je masa Sunca kad znamo da je srednja brzina Zemlje pri kruženju oko Sunca 30 km/s, a polumjer njezine staze 1,5 × 10^8 km?

$$v = 30\ \frac{km}{s}$$
$$r = 1{,}5 \cdot 10^8\ km$$
$$m = ?$$

$$F_{CP} = F_G$$
$$\frac{m \cdot v^2}{r} = G \cdot \frac{m \cdot m_S}{r^2}$$
$$m_S = \frac{v^2 \cdot r}{G}$$
$$m_S = \frac{30000^2 \cdot 1{,}5 \cdot 10^8}{6{,}67 \cdot 10^{-11}}$$
$$m_S = 2 \cdot 10^{30}\ kg$$

1.388. Kolika je akceleracija slobodnog pada na površini Sunca ako je njegov polumjer 108 puta veći od polumjera Zemlje i ako je odnos gustoća Sunca i Zemlje 1 : 4 ?

$$r_s = 108 \cdot r_z$$
$$\rho_s = \frac{1}{4} \cdot \rho_z$$
$$g_s = ?$$

$$m \cdot g_z = G \cdot \frac{m \cdot m_z}{r_z^2}$$
$$m \cdot g_s = G \cdot \frac{m \cdot m_s}{r_s^2}$$
$$\frac{m \cdot g_s}{m \cdot g_z} = \frac{G \cdot \frac{m \cdot m_s}{r_s^2}}{G \cdot \frac{m \cdot m_z}{r_z^2}}$$

$$\frac{g_s}{g_z} = \frac{m_s \cdot r_z^2}{m_z \cdot r_s^2}$$
$$\frac{g_s}{g_z} = \frac{m_s \cdot r_z^2}{m_z \cdot (108 \cdot r_z)^2}$$
$$\frac{g_s}{g_z} = \frac{\rho_s \cdot \frac{4}{3} \cdot r_s^3 \cdot \pi}{\rho_z \cdot \frac{4}{3} \cdot r_z^3 \cdot \pi \cdot 108^2}$$

$$\frac{g_s}{g_z} = \frac{\rho_s \cdot r_s^3}{\rho_z \cdot r_z^3 \cdot 108^2}$$
$$\frac{g_s}{g_z} = \frac{\rho_s \cdot (108 \cdot r_z)^3}{\rho_z \cdot r_z^3 \cdot 108^2}$$
$$\frac{g_s}{g_z} = \frac{\rho_s \cdot 108}{\rho_z}$$
$$\frac{g_s}{g_z} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \rho_z \cdot 108}{\rho_z}$$
$$\frac{g_s}{g_z} = 27$$
$$g_s = 27 \cdot g_z = 27 \cdot 9{,}81$$
$$g_s = 264{,}87\ \frac{m}{s^2}$$

1.389. Odredi akceleraciju slobodnog pada tijela na površini Sunca ako znamo da je polumjer Zemljine staze R = 1,5 × 10^8 km, polumjer Sunca r = 7 × 10^5 km i vrijeme ophoda Zemlje oko Sunca T = 1 godina.

R = 1,5 × 10^8 km = 1,5 × 10^{11} m
r = 7 × 10^5 km = 7 × 10^8 m
T = 1 god = 31536000 s
g = ?

$$F = G \cdot \frac{m \cdot m_S}{r^2}$$
$$m \cdot g = G \cdot \frac{m \cdot m_S}{r^2}$$
$$G \cdot m_S = g \cdot r^2$$

$$G \cdot \frac{m \cdot m_S}{R^2} = \frac{m \cdot v^2}{R}$$
$$G \cdot m_S = v^2 \cdot R$$
$$G \cdot m_S = \frac{4 \cdot R^3 \cdot \pi^2}{T^2}$$
$$g \cdot r^2 = \frac{4 \cdot R^3 \cdot \pi^2}{T^2}$$
$$g = \frac{4 \cdot R^3 \cdot \pi^2}{T^2 \cdot r^2}$$
$$g = \frac{4 \cdot (1{,}5 \cdot 10^{11})^3 \cdot \pi^2}{31536000^2 \cdot (7 \cdot 10^8)^2}$$
$$g = 273{,}33\ \frac{m}{s^2}$$

1.390. Polumjer Marsa iznosi 0,53 polumjera Zemlje, a masa 0,11 mase Zemlje. Koliko je puta sila teža na Marsu manja nego na Zemlji?

$r_M = 0{,}53\ r_Z$
$m_M = 0{,}11\ m_Z$
$\frac{g_Z}{g_M} = ?$

$$m \cdot g_Z = G \cdot \frac{m \cdot m_Z}{r_Z^2}$$
$$m \cdot g_M = G \cdot \frac{m \cdot m_M}{r_M^2}$$

$$\frac{m \cdot g_Z}{m \cdot g_M} = \frac{G \cdot \frac{m \cdot m_Z}{r_Z^2}}{G \cdot \frac{m \cdot m_M}{r_M^2}}$$
$$\frac{g_Z}{g_M} = \frac{m_Z \cdot r_M^2}{m_M \cdot r_Z^2}$$
$$\frac{g_Z}{g_M} = \frac{m_Z \cdot 0{,}53^2 \cdot r_Z^2}{0{,}11 \cdot m_Z \cdot r_Z^2}$$
$$\frac{g_Z}{g_M} = 2{,}55$$

1.391. Planet Mars ima dva prirodna satelita, Fobosa i Demiosa. Prvi se nalazi na udaljenosti r_1 = 9500 km od središta Marsa, a drugi na udaljenosti r_2 = 24000 km. Nađi periode kruženja tih satelita oko Marsa. Masa Marsa iznosi 0,107 mase Zemlje.

r_1 = 9500 km
r_2 = 24000 km
$m_M = 0{,}107\ m_Z$
T_1, T_2 = ?

$$\frac{m \cdot v^2}{r} = G \cdot \frac{m \cdot m_M}{r^2}$$
$$v^2 = G \cdot \frac{m_M}{r}$$
$$\frac{4 \cdot r^2 \cdot \pi^2}{T^2} = G \cdot \frac{m_M}{r}$$
$$T = \sqrt{\frac{4 \cdot r^3 \cdot \pi^2}{G \cdot m_M}}$$

$$T_1 = \sqrt{\frac{4 \cdot r_1^3 \cdot \pi^2}{G \cdot m_M}}$$
$$T_1 = \sqrt{\frac{4 \cdot 9500000^3 \cdot \pi^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 0{,}107 \cdot 6 \cdot 10^{24}}}$$
$$T_1 = 28107\ \text{s} = 7{,}8\ \text{h}$$

$$T_2 = \sqrt{\frac{4 \cdot r_2^3 \cdot \pi^2}{G \cdot m_M}}$$
$$T_2 = \sqrt{\frac{4 \cdot 24000000^3 \cdot \pi^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 0{,}107 \cdot 6 \cdot 10^{24}}}$$
$$T_1 = 112888\ \text{s} = 31{,}35\ \text{h}$$

1.392. Neka je polumjer nekog asteroida 5 km i pretpostavimo da mu je gustoća ρ = 5,5 g/cm^3. a) Nađi akceleraciju slobodnog pada g_a na njegovoj površini. b) Odredi na koju će visinu poskočiti čovjek na asteroidu ako uporabi isti napor kojim bi na Zemlji poskočio 5 cm visoko. Asteroid ima oblik kugle.

r = 5 km = 5000 m
ρ = 5,5 g/cm^3 = 5500 kg/m^3
h_Z = 5 cm = 0,05 m
g_a, h_a = ?

$$m_a = \rho \cdot V$$
$$m_a = \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$$
$$m_a = 5500 \cdot \frac{4}{3} \cdot 5000^3 \cdot \pi$$
$$m_a = 2{,}88 \cdot 10^{15}\ \text{kg}$$

$$m \cdot g_a = G \cdot \frac{m \cdot m_a}{r^2}$$
$$g_a = G \cdot \frac{m_a}{r^2}$$
$$g_a = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{2{,}88 \cdot 10^{15}}{5000^2}$$
$$g_a = 0{,}0076\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$m \cdot g_z \cdot h_z = m \cdot g_a \cdot h_a$$
$$h_a = \frac{g_z \cdot h_z}{g_a}$$
$$h_a = \frac{9{,}81 \cdot 0{,}05}{0{,}0076}$$
$$h_a = 64{,}54\ \text{m}$$

1.393. Koliko je dugačka nit jednostavnog njihala ako zamislimo da se njiše na nekom planetu jednake gustoće kao Zemlja, polumjera dva puta manjeg od Zemlje? Njihalo učini tri titraja u minuti.

$\rho = \rho_Z$

$r = \frac{1}{2} \cdot r_Z$

$t = 3\ \frac{titr}{min} \Rightarrow T = 20\ s$

$l = ?$

$$m \cdot g_P = G \cdot \frac{m \cdot m_P}{r_P^2}$$

$$g_P = G \cdot \frac{m_P}{r_P^2}$$

$$g_P = G \cdot \frac{\rho \cdot \frac{4}{3} \cdot r_P^3 \cdot \pi}{r_P^2}$$

$$g_P = G \cdot \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot r_P \cdot \pi$$

$$m \cdot g_Z = G \cdot \frac{m \cdot m_Z}{r_Z^2}$$

$$g_Z = G \cdot \frac{m_Z}{r_Z^2}$$

$$g_Z = G \cdot \frac{\rho_Z \cdot \frac{4}{3} \cdot r_Z^3 \cdot \pi}{r_Z^2}$$

$$g_Z = G \cdot \rho_Z \cdot \frac{4}{3} \cdot r_Z \cdot \pi$$

$$\frac{g_P}{g_Z} = \frac{G \cdot \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot r_P \cdot \pi}{G \cdot \rho_Z \cdot \frac{4}{3} \cdot r_Z \cdot \pi}$$

$$\frac{g_P}{g_Z} = \frac{\rho \cdot r_P}{\rho_Z \cdot r_Z}$$

$$\frac{g_P}{g_Z} = \frac{\rho \cdot \frac{1}{2} \cdot r_Z}{\rho_Z \cdot r_Z}$$

$$\frac{g_P}{g_Z} = \frac{1}{2}$$

$$g_P = \frac{1}{2} \cdot g_Z$$

$$g_P = \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 = 4{,}905\ \frac{m}{s^2}$$

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g_P}} \Rightarrow l = \frac{T^2 \cdot g_P}{4 \cdot \pi^2}$$

$$l = \frac{20^2 \cdot 4{,}905}{4 \cdot \pi^2} = 49{,}69\ m$$

1.394. Odredi gustoću planeta na kojemu dan i noć traju T = 24 sata i na ekvatoru kojega su tijela bez težine.

T = 24 h = 86400 s

F_{CP} = G

ρ = ?

$$\frac{m \cdot v^2}{r} = G \cdot \frac{m \cdot m_P}{r^2}$$

$$\frac{m \cdot \frac{4 \cdot r^2 \cdot \pi^2}{T^2}}{r} = G \cdot \frac{m \cdot \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi}{r^2}$$

$$\rho = \frac{3 \cdot \pi}{T^2 \cdot G}$$

$$\rho = \frac{3 \cdot \pi}{86400^2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}}$$

$$\rho = 18{,}93\ \frac{kg}{m^3} = 0{,}01893\ \frac{g}{cm^3}$$

1.395. Znamo da je zbog rotacije planeta sila teža na ekvatoru manja nego na polovima. Na kojoj je visini iznad površine planeta na polu sila teža jednaka sili teži na ekvatoru? Planet neka je kugla polumjera r. Vrijeme jednog okreta planeta oko osi neka je T, a njegova srednja gustoća ρ.

$$G\cdot\frac{m\cdot m_P}{(r+h)^2}=G\cdot\frac{m\cdot m_P}{r^2}-\frac{m\cdot v^2}{r}$$

$$G\cdot\frac{m_P}{(r+h)^2}=G\cdot\frac{m_P}{r^2}-\frac{4\cdot r^2\cdot\pi^2}{T^2}$$

$$G\cdot m_P=\left(G\cdot\frac{m_P}{r^2}-\frac{4\cdot r^2\cdot\pi^2}{T^2}\right)\cdot(r+h)^2$$

$$(r+h)^2=\frac{G\cdot\rho\cdot\frac{4}{3}\cdot r^3\cdot\pi-\frac{4\cdot r^2\cdot\pi^2}{T^2}}{G\cdot\rho\cdot\frac{4}{3}\cdot r^3\cdot\pi}$$

$$r^2+2\cdot r\cdot h+h^2+\frac{3\cdot\pi}{G\cdot\rho\cdot r\cdot T^2}-1=0$$

$$r^2+2\cdot r\cdot h+h^2+\frac{3\cdot\pi}{G\cdot\rho\cdot r\cdot T^2}-1=0$$

$$h^2+2\cdot r\cdot h+\frac{3\cdot\pi}{G\cdot\rho\cdot r\cdot T^2}-1=0$$

$$h_{1,2}=\frac{-2\cdot r\pm\sqrt{(2\cdot r)^2-4\cdot\left(\frac{3\cdot\pi}{G\cdot\rho\cdot r\cdot T^2}-1\right)}}{2}$$

1.396. Koliko je puta kinetička energija umjetnog Zemljinog satelita manja od njegove potencijalne energije? Pretpostavimo da je staza satelita kružna.

$$r=h$$

$$E_P=m\cdot g\cdot(r+h)=2\cdot m\cdot g\cdot h$$

$$E_K=\frac{m\cdot v^2}{2}$$

$$\frac{E_K}{E_P}=\frac{\frac{m\cdot v^2}{2}}{2\cdot m\cdot g\cdot h}=\frac{m\cdot 2\cdot g\cdot h}{4\cdot m\cdot g\cdot h}=\frac{1}{2}$$

$$E_K=\frac{E_P}{2}$$

1.397. Neki satelit obilazi Zemlju svakih 98 minuta krećući se na srednjoj visinu 500 km. Izračunaj iz tih podataka masu Zemlje.

T = 98 min = 5880 s
h = 500 km = 500000 m
m_Z = ?

$$F_{CP}=F_G$$

$$\frac{m\cdot v^2}{r}=G\cdot\frac{m\cdot m_Z}{r^2}$$

$$v^2=G\cdot\frac{m_Z}{r}$$

$$\frac{4\cdot\pi\cdot r^2}{T^2}=G\cdot\frac{m_Z}{r}$$

$$m_Z=\frac{4\cdot\pi^2\cdot r^3}{T^2\cdot G}$$

$$r=6400+500=6900\ \text{km}$$

$$m_Z=\frac{4\cdot\pi^2\cdot 6900000^3}{5880^2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}}$$

$$m_Z=5{,}62\cdot 10^{24}\ \text{kg}$$

1.398. Oko planeta mase m_P kruži satelit. Koliki je polumjer staze ako je T ophodno vrijeme satelita?

$$F_{CP}=F_G$$

$$\frac{m\cdot v^2}{r}=G\cdot\frac{m\cdot m_P}{r^2}$$

$$v^2=G\cdot\frac{m_P}{r}$$

$$\frac{4\cdot\pi\cdot r^2}{T^2}=G\cdot\frac{m_Z}{r}$$

$$r^3=G\cdot\frac{m_P\cdot T^2}{4\cdot\pi^2}$$

$$r=\sqrt[3]{G\cdot\frac{m_P\cdot T^2}{4\cdot\pi^2}}$$

1.399. Kolika je prva kozmička brzina za Mjesec ako znamo da je polumjer Mjeseca $1{,}74 \times 10^6$ m, a masa $7{,}3 \times 10^{22}$ kg?

r_M = 1740 km = 1740000 m
$m_M = 7{,}3 \times 10^{22}$ kg
v = ?

$$F_{CP} = F_G$$
$$\frac{m \cdot v^2}{r} = G \cdot \frac{m \cdot m_M}{r^2}$$
$$v^2 = G \cdot \frac{m_M}{r}$$
$$v = \sqrt{G \cdot \frac{m_M}{r}}$$
$$v = \sqrt{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{7{,}3 \cdot 10^{22}}{1740000}}$$
$$v = 1672{,}8\ \frac{m}{s}$$

1.400. Izračunaj prvu kozmičku brzinu na površini Mjeseca kad znaš da je polumjer Mjeseca 1740 km, a akceleracija slobodnog pada na Mjesecu 0,17 Zemljine akceleracije.

r = 1740 km
g_M = 0,17g
v = ?

$$F_{CP} = G_M$$
$$\frac{m \cdot v^2}{r} = m \cdot g_M$$
$$v^2 = r \cdot g_M$$
$$v = \sqrt{r \cdot g_M}$$
$$v = \sqrt{1740000 \cdot 0{,}17 \cdot 9{,}81}$$
$$v = 1703{,}5\ \frac{m}{s}$$

1.401. Koliki moraju biti polumjer kružne staze umjetnog Zemljina satelita i njegova brzina da njegov period bude jednak periodu obrtanja Zemlje, tj. da se sa Zemlje čini nepomičnim?

$T_S = T_Z$
r_S, v_S = ?

$$F_{CP} = F_G$$
$$\frac{m \cdot v^2}{r} = G \cdot \frac{m \cdot m_P}{r^2}$$
$$v^2 = G \cdot \frac{m_P}{r}$$
$$\frac{4 \cdot \pi \cdot r^2}{T^2} = G \cdot \frac{m_Z}{r}$$
$$r^3 = G \cdot \frac{m_P \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2}$$
$$r = \sqrt[3]{G \cdot \frac{m_P \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2}}$$
$$r = \sqrt[3]{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{6 \cdot 10^{24} \cdot 86400^2}{4 \cdot \pi^2}}$$
$$r = 4{,}22 \cdot 10^7\ m$$
$$v = \frac{2 \cdot r \cdot \pi}{T}$$
$$v = \frac{2 \cdot 4{,}22 \cdot 10^7 \cdot \pi}{86400}$$
$$v = 3068{,}8\ \frac{m}{s}$$

1.402. Odredi udaljenost x od središta Zemlje do umjetnog satelita mase m i njegovu brzinu v ako satelit kruži u ravnini Zemljina ekvatora, a sa Zemlje se čini nepomičnim. Možemo uzeti da je polumjer Zemlje r = 6400 km.

r = 6400 km
x, v = ?

$$x = r + h$$
$$\frac{m \cdot v^2}{x} = G \cdot \frac{m \cdot m_Z}{x^2}$$
$$v^2 = G \cdot \frac{m_Z}{x}$$
$$\frac{4 \cdot \pi \cdot x^2}{T^2} = G \cdot \frac{m_Z}{x}$$
$$x^3 = G \cdot \frac{m_Z \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2}$$
$$x = \sqrt[3]{G \cdot \frac{m_Z \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2}}$$
$$x = \sqrt[3]{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{6 \cdot 10^{24} \cdot 86400^2}{4 \cdot \pi^2}}$$
$$x = 4{,}22 \cdot 10^7\ m$$
$$v = \frac{2 \cdot x \cdot \pi}{T}$$
$$v = \frac{2 \cdot 4{,}22 \cdot 10^7 \cdot \pi}{86400}$$
$$v = 3068{,}8\ \frac{m}{s}$$