

12. ROTACIJA KRUTOG TIJELA (1.320. - 1. 350.)

1.320. Izrazi: a) 30 ophoda radijanima, b) 84π radijana ophodima, c) 50 op/s u rad/s, d) 2100 op/min u rad/s, e) rad/s u $^{\circ}$ /s (stupnjevima u sekundi).

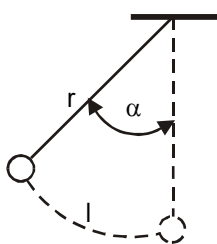
a)	b)	c)	d)	e)
1 ophod = 2π radijana $30 \times 2\pi = 60\pi$ rad	$\frac{84\pi}{2} = 42$ op	$50 \times 2 = 100$ $50 \text{ op/s} = 100\pi$ rad	$2100 \frac{\text{op}}{\text{min}} = \frac{2100}{60} = 35 \frac{\text{op}}{\text{s}}$ $35 \times 2 = 70$ $35 \frac{\text{op}}{\text{s}} = 70\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	$\pi \text{ rad} = 180^{\circ}$ $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}$

1.321. Kuglica koja visi na niti duljine 50 cm opisala je luk 20 cm. Nađi pripadni kut α , izražen u radijanima i stupnjevima, što ga je opisala nit njihala.

$$r = 50 \text{ cm} = 0,5 \text{ m}$$

$$l = 20 \text{ cm} = 0,2 \text{ m}$$

$$\alpha = ?$$



$$l = \frac{r \cdot \pi \cdot \alpha}{180^{\circ}} \Rightarrow \alpha = \frac{l \cdot 180^{\circ}}{r \cdot \pi}$$

$$\alpha = \frac{0,2 \cdot 180^{\circ}}{0,5 \cdot \pi}$$

$$\alpha = 22,91^{\circ} = 22^{\circ}54'36''$$

$$22,91^{\circ} = 22,91 \cdot \frac{\pi}{180^{\circ}} = 0,13\pi \text{ rad}$$

1.322. Kotač bicikla ima polumjer 36 cm. Kojom se brzinom kreće biciklist ako kotač učini 120 okreta u minuti?

$$r = 36 \text{ cm} = 0,36 \text{ m}$$

$$f = 120 \text{ okr/min}$$

$$v = ?$$

$$f = \frac{n}{60} = \frac{120}{60} = 2 \text{ Hz}$$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 2 \cdot \pi \cdot 2 = 4\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

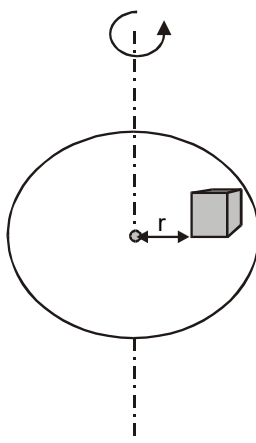
$$v = \omega \cdot r = 4\pi \cdot 0,36 = 4,52 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

1.323. Na horizontalnoj ploči, koja se može okretati oko vertikalne osi, miruje tijelo na udaljenosti 2 m od središta ploče. Ploča se počinje okretati tako da joj brzina postupno raste. Koeficijent trenja između tijela i ploče iznosi 0,25. Odredi kutnu brzinu kojom se mora ploča okretati da bi tijelo upravo počelo kliziti s ploče.

$$r = 2 \text{ m}$$

$$\mu = 0,25$$

$$\omega = ?$$



$$F_{\text{CP}} = F_{\text{TR}}$$

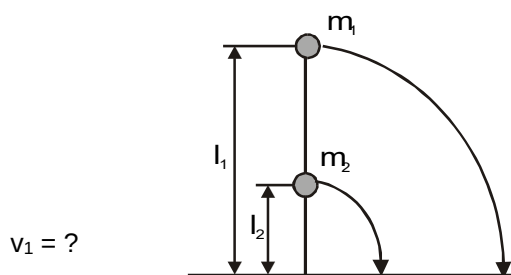
$$m \cdot \omega^2 \cdot r = \mu \cdot m \cdot g$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\mu \cdot g}{r}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{0,25 \cdot 9,81}{2}}$$

$$\omega = 1,1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

- 1.324. Na površini Zemlje učvršćen je pomoću šarke lagani štap duljine l_1 u vertikalnom položaju. Na njemu su učvršćene dvije kugle masa m_1 i m_2 . Kugla mase m_1 nalazi se na gornjem kraju štapa, a kugla mase m_2 na udaljenosti l_2 od donjeg kraja štapa. Masu štapa možemo zanemariti u odnosu prema masi kugala. Kolika je brzina kugle mase m_1 kad padne na Zemlju ako je štap počeo padati brzinom 0?



$$E_{K1} + E_{K2} = E_{P1} + E_{P2}$$

$$\frac{m_1 \cdot v_1^2}{2} + \frac{m_2 \cdot v_2^2}{2} = m_1 \cdot g \cdot h_1 + m_2 \cdot g \cdot h_2$$

$$\omega_1 = \frac{v_1}{l_1} \quad \omega_2 = \frac{v_2}{l_2}$$

$$\omega_1 = \omega_2$$

$$\frac{v_1}{l_1} = \frac{v_2}{l_2} \Rightarrow v_2 = v_1 \cdot \frac{l_2}{l_1}$$

$$\frac{m_1 \cdot v_1^2}{2} + \frac{m_2 \cdot v_1^2 \cdot \frac{l_2^2}{l_1^2}}{2} = m_1 \cdot g \cdot l_1 + m_2 \cdot g \cdot l_2$$

$$v_1^2 \cdot \left(m_1 + m_2 \cdot \frac{l_2^2}{l_1^2} \right) = 2 \cdot g \cdot (m_1 \cdot l_1 + m_2 \cdot l_2)$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot (m_1 \cdot l_1 + m_2 \cdot l_2)}{m_1 + m_2 \cdot \frac{l_2^2}{l_1^2}}}$$

- 1.325. Kotač zamašnjak jednoliko povećava brzinu okretaja te nakon 10 sekundi ima 720 okreta u minuti. Izračunaj kutnu akceleraciju i linearnu akceleraciju točke koja je 1 metar udaljena od središta zamašnjaka.

$$\begin{aligned} t &= 10 \text{ s} \\ f &= 720 \text{ okr/min} \\ r &= 1 \text{ m} \\ \alpha &= ? \\ a &= ? \end{aligned}$$

$$f = \frac{720}{60} = 12 \text{ Hz}$$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 2 \cdot \pi \cdot 12 = 24\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

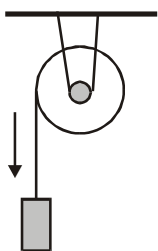
$$\alpha = \frac{\omega}{t} = \frac{24\pi}{10} = 2,4\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

$$v = \omega \cdot r = 24\pi \cdot 1 = 24\pi \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$a = \frac{v}{t} = \frac{24\pi}{10} = 2,4\pi \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 7,54 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

- 1.326. Oko nepomične koloture polumjera 20 cm namotana je nit na kojoj visi uteg. Uteg najprije miruje, a onda počinje padati akceleracijom 2 cm/s^2 pri čemu se nit odmotava. Nađi kutnu brzinu koloture u času kad je uteg prešao put 100 cm.

$$\begin{aligned} r &= 20 \text{ cm} = 0,2 \text{ m} \\ a &= 2 \text{ cm/s}^2 = 0,02 \text{ m/s}^2 \\ s &= 100 \text{ cm} = 1 \text{ m} \\ \omega &= ? \end{aligned}$$



$$s = \frac{a}{2} \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot s}{a}}$$

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 1}{0,02}} = 10 \text{ s}$$

$$a = \frac{v}{t} \Rightarrow v = a \cdot t$$

$$v = 0,02 \cdot 10 = 0,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v = \omega \cdot r \Rightarrow \omega = \frac{v}{r}$$

$$\omega = \frac{0,2}{0,2} = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

- 1.327. Kotač se vrti stalnom akceleracijom 8 rad/s^2 . Koliko okreta učini u 5 sekundi?

$$\begin{aligned} \alpha &= 8 \text{ rad/s}^2 \\ t &= 5 \text{ s} \\ n &= ? \end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{\omega}{t} \Rightarrow \omega = \alpha \cdot t$$

$$\omega = 8 \cdot 5 = 40 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$$

$$f = \frac{40}{2 \cdot \pi} = 6,4 \text{ Hz}$$

$$n = \frac{f}{2} \cdot t = \frac{6,4}{2} \cdot 5$$

$$n = 16 \text{ okreta}$$

- 1.328. Kotač zamašnjak okreće se brzinom 98 okr/min. Dvije minute pošto je isključen stroj koji ga je pokretao stroj se zaustavio. Izračunaj kojom se kutnom akceleracijom zaustavljao kotač i koliko je okreta učinio za vrijeme zaustavljanja. Pretpostavimo da je zaustavljanje bilo jednoliko usporeno.

$$\begin{aligned} f &= 98 \text{ okr/min} \\ t &= 2 \text{ min} = 120 \text{ s} \\ \alpha &= ? \\ n &= ? \end{aligned}$$

$$f = \frac{98}{60} = 1,6\dot{3} \text{ Hz}$$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 2 \cdot \pi \cdot 1,6\dot{3}$$

$$\omega = 10,26 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\alpha = \frac{\omega}{t} = \frac{10,26}{120} = 0,085 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

$$n = \frac{f}{2} \cdot t$$

$$n = \frac{1,6\dot{3}}{2} \cdot 120$$

$$n = 98 \text{ okreta}$$

- 1.329. Na kotač polumjera 0,72 m, momenta tromosti $4,8 \text{ kgm}^2$, djeluje tangencijalno na rub stalna sila 10 N. Nađi: a) kutnu akceleraciju, b) kutnu brzinu na kraju četvrte sekunde, c) broj okreta za vrijeme te četiri sekunde, d) pokaži da je rad koji moramo uložiti u rotaciju kotača jednak kinetičkoj energiji koju kotač ima na kraju četvrte sekunde.

$$\begin{aligned} r &= 0,72 \text{ m} \\ I &= 4,8 \text{ kgm}^2 \\ F &= 10 \text{ N} \\ t &= 4 \text{ s} \\ \alpha &= ? \\ \omega &= ? \\ n &= ? \\ W &= E_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{a)} \\ \alpha &= \frac{M}{I} \end{aligned}$$

$$M = r \cdot F$$

$$\alpha = \frac{r \cdot F}{I}$$

$$\alpha = \frac{0,72 \cdot 10}{4,8}$$

$$\alpha = 1,5 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \\ \alpha &= \frac{\omega}{t} \Rightarrow \omega = \alpha \cdot t \end{aligned}$$

$$\omega = 1,5 \cdot 4$$

$$\omega = 6 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \\ \omega &= 2 \cdot \pi \cdot f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} \end{aligned}$$

$$f = \frac{6}{2 \cdot \pi}$$

$$f = 0,95 \text{ Hz}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \\ W &= E_k = \frac{I \cdot \omega^2}{2} \end{aligned}$$

$$W = E_k = \frac{4,8 \cdot 6^2}{2}$$

$$W = E_k = 86,4 \text{ J}$$

- 1.330. Rotor motora ima moment tromosti 6 kgm^2 . Koliki stalni moment sile mora djelovati na rotor da bi povećao brzinu rotora od 120 okr/min na 540 okr/min u vremenu 6s?

$$I = 6 \text{ kgm}^2$$

$$n_1 = 120 \text{ okr/min}$$

$$n_2 = 540 \text{ okr/min}$$

$$t = 6 \text{ s}$$

$$M = ?$$

$$f_1 = \frac{n_1}{60} = \frac{120}{60} = 2 \text{ Hz}$$

$$f_2 = \frac{n_2}{60} = \frac{540}{60} = 9 \text{ Hz}$$

$$\omega_1 = 2 \cdot \pi \cdot f_1 = 2 \cdot \pi \cdot 2 = 4\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\omega_2 = 2 \cdot \pi \cdot f_2 = 2 \cdot \pi \cdot 9 = 18\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{6} = \frac{18\pi - 4\pi}{6} = \frac{14}{6}\pi = \frac{7}{3}\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

$$M = \alpha \cdot I$$

$$M = \frac{7}{3}\pi \cdot 6 = 14\pi \text{ Nm}$$

- 1.331. Kako se mijenja kutna akceleracija kružne ploče na koju djeluje stalni zakretni moment ako pri istoj masi povećamo njezin polumjer dva puta?

$$M = M_1 = M_2$$

$$r_2 = 2r_1$$

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = ?$$

$$I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2$$

$$\alpha = \frac{M}{I}$$

$$\alpha_1 = \frac{M}{I_1} \quad \alpha_2 = \frac{M}{I_2}$$

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{I_1}{I_2} = \frac{\frac{m \cdot r_1^2}{2}}{\frac{m \cdot r_2^2}{2}} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{r_1^2}{(2 \cdot r_1)^2} = \frac{1}{4}$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{4} \cdot \alpha_1$$

Kutna akceleracija postaje 4 puta manja.

- 1.332. Kružna se ploča, promjera 1,6 m i mase 490 kg, vrti i čini 600 okr/min. Na njezinu oblu površinu pritišće kočnica silom 196 N. Faktor trenja kočnice o ploču jest 0,4. Koliko će okretaja učiniti ploča dok se ne zaustavi?

$$d = 1,6 \text{ m} \Rightarrow r = 0,8 \text{ m}$$

$$m = 490 \text{ kg}$$

$$f = 600 \text{ okr/min} = 10 \text{ Hz}$$

$$F_p = 196 \text{ N}$$

$$\mu = 0,4$$

$$n = ?$$

$$I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2$$

$$I = \frac{1}{2} \cdot 490 \cdot 0,8^2$$

$$I = 156,8 \text{ kgm}^2$$

$$M = F_{tr} \cdot r = \mu \cdot F_p \cdot r$$

$$M = 0,4 \cdot 196 \cdot 0,8 = 62,72 \text{ Nm}$$

$$\alpha = \frac{M}{I} = \frac{62,72}{156,8} = 0,4 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot 10 = 62,83 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\alpha = \frac{\omega}{t} \Rightarrow t = \frac{\omega}{\alpha}$$

$$t = \frac{62,83}{0,4} = 157 \text{ s}$$

$$n = \frac{f}{2} \cdot t$$

$$n = \frac{10}{2} \cdot 157$$

$$n = 785 \text{ okreta}$$

1. 333. Homogeni štap dug 1 m, mase 0,5 kg, okreće se u vertikalnoj ravnini oko horizontalne osi koja prolazi sredinom štapa. Koliku će kutnu akceleraciju imati štap ako je zakretni moment $9,8 \times 10^{-2} \text{ Nm}$?

$$l = 1 \text{ m}$$

$$m = 0,5 \text{ kg}$$

$$M = 9,8 \times 10^{-2}$$

$$\alpha = ?$$

$$I = \frac{m \cdot l^2}{12} = \frac{0,5 \cdot 1^2}{12} = 0,041\dot{6} \text{ kgm}^2$$

$$\alpha = \frac{M}{I} = \frac{9,8 \cdot 10^{-2}}{0,041\dot{6}} = 2,352 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

- 1.334. Valjak mase 100 kg, polumjera 0,1 m, okreće se oko svoje osi. Koliki mora biti zakretni moment da bi se valjak vrtio kutnom akceleracijom 2 rad/s^2 ?

$$\begin{array}{lll}
 m = 100 \text{ kg} & I = \frac{m \cdot r^2}{2} & M = \alpha \cdot I \\
 r = 0,1 \text{ m} & & M = 2 \cdot 0,5 \\
 \alpha = 2 \text{ rad/s}^2 & I = \frac{100 \cdot 0,1^2}{2} & M = 1 \text{ Nm} \\
 M = ? & I = 0,5 \text{ kgm}^2 &
 \end{array}$$

- 1.335. Zamašnjak ima oblik kružne ploče, masu 50 kg i polumjer 0,2 m. Zavrtjeli smo ga do brzine 480 okr/min i zatim prepustili samome sebi. Pod utjecajem trenja on se zaustavio. Koliki je moment sile trenja ako pretpostavimo da je trenje stalno i ako se zamašnjak zaustavio nakon 50 sekundi?

$$\begin{array}{lllll}
 m = 50 \text{ kg} & I = \frac{m \cdot r^2}{2} & \omega = 2 \cdot \pi \cdot f & \alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} & M = \alpha \cdot I \\
 r = 0,2 \text{ m} & & & & M = 1 \cdot 1 \\
 f = 480 \text{ okr/min} & I = \frac{50 \cdot 0,2^2}{2} & \omega = 2 \cdot \pi \cdot \frac{480}{60} & \alpha = \frac{50,26}{50} & M = 1 \text{ Nm} \\
 t = 50 \text{ s} & I = 1 \text{ kgm}^2 & \omega = 50,26 \frac{\text{rad}}{\text{s}} & \alpha = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} & \\
 M_{\text{tr}} = ? & & & &
 \end{array}$$

- 1.336. Na zamašnjak polumjera 1m djeluje zakretni moment 392 Nm. Koliku masu mora imati zamašnjak da bi uz zadani moment dobio kutnu akceleraciju $0,4 \text{ rad/s}^2$? Masa zamašnjaka raspoređena je po njegovu obodu.

$$\begin{array}{lll}
 r = 1 \text{ m} & M = \alpha \cdot I \Rightarrow I = \frac{M}{\alpha} & I = m \cdot r^2 \Rightarrow m = \frac{I}{r^2} \\
 M = 392 \text{ Nm} & & m = \frac{980}{1^2} \\
 \alpha = 0,4 \text{ rad/s}^2 & I = \frac{392}{0,4} = 980 \text{ kgm}^2 & m = 980 \text{ kg} \\
 m = ? & &
 \end{array}$$

- 1.337. Koliki je moment tromosti Zemljine kugle ako uzmemo da su srednji polumjer Zemlje 6400 km i srednja gustoća $5,5 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$?

$$\begin{array}{llll}
 r = 6400 \text{ km} = 6,4 \times 10^6 \text{ m} & V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi & m = \rho \cdot V & I = \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2 \\
 \rho = 5,5 \times 10^3 \text{ kg/m}^3 & & m = 5,5 \cdot 10^3 \cdot 1098 \cdot 10^{21} & \\
 I = ? & V = \frac{4}{3} \cdot (6,4 \cdot 10^6)^3 \cdot \pi & m = 6,04 \cdot 10^{24} \text{ kg} & I = \frac{2}{5} \cdot 6,04 \cdot 10^{24} \cdot (6,4 \cdot 10^6)^2 \\
 & V = 1098 \cdot 10^{21} \text{ m}^3 & & I = 9,9 \cdot 10^{37} \text{ kgm}^2
 \end{array}$$

- 1.338. Na učvršćenu koloturu polumjera 0,5 m omotana je nit na kraju koje je učvršćen uteg mase 10 kg. Nađi moment tromosti koloture ako uteg pada akceleracijom $2,04 \text{ m/s}^2$.

$$\begin{array}{llll}
 r = 0,5 \text{ m} & M = r \cdot F & a = r \cdot \alpha & M = \alpha \cdot I \\
 m = 10 \text{ kg} & M = r \cdot m \cdot g & \alpha = \frac{a}{r} & I = \frac{M}{\alpha} \\
 a = 2,04 \text{ m/s}^2 & M = 0,5 \cdot 10 \cdot 9,81 & \alpha = \frac{2,04}{0,5} & I = \frac{49,05}{4,08} \\
 I = ? & M = 49,05 \text{ Nm} & \alpha = 4,08 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} & I = 12,02 \text{ kgm}^2
 \end{array}$$

1.339. Moment tromosti kotača promjera 0,2 m jednak je 192,08 Nms². Na kotač djeluje stalan zakretni moment 96,04 Nm. Nađi kutni brzinu, kutnu akceleraciju i linijsku brzinu točke na obodu kotača nakon 30 sekundi. Početna je brzina kotača 0.

$$\begin{aligned}
 d = 0,2 \text{ m} &\Rightarrow r = 0,1 \text{ m} & \alpha &= \frac{M}{I} & \omega &= \alpha \cdot t & v &= r \cdot \omega \\
 I &= 192,08 \text{ Nms}^2 & & & \omega &= 0,5 \cdot 30 & v &= 0,1 \cdot 15 \\
 M &= 96,04 \text{ Nm} & \alpha &= \frac{96,04}{192,08} & \omega &= 15 \frac{\text{rad}}{\text{s}} & v &= 15 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\
 v_0 &= 0 \frac{\text{m}}{\text{s}} & \alpha &= 0,5 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} & & & & \\
 t &= 30 \text{ s} & & & & & & \\
 \omega, \alpha, v &=? & & & & & &
 \end{aligned}$$

1.340. Željezna valjkasta osovina polumjera 0,15 m, duljine 2m, vrti se 300 okr/min. Nađi moment tromosti i kinetičku energiju osovine.

$$\begin{aligned}
 r &= 0,15 \text{ m} & m &= \rho \cdot V & I &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 & f &= \frac{n}{60} & \omega &= 2 \cdot \pi \cdot f & E &= \frac{I \cdot \omega^2}{2} \\
 \rho &= 7900 \text{ kg/m}^3 & m &= \rho \cdot r^2 \cdot \pi \cdot l & & & & & \omega &= 2 \cdot \pi \cdot 5 & E &= \frac{12,56 \cdot 3,14^2}{2} \\
 l &= 2 \text{ m} & m &= 7900 \cdot 0,15^2 \cdot \pi \cdot 2 & I &= \frac{1}{2} \cdot 1116,8 \cdot 0,15^2 & f &= \frac{300}{60} & \omega &= 31,4 \frac{\text{rad}}{\text{s}} & E &= \frac{12,56 \cdot 3,14^2}{2} \\
 n &= 300 \text{ okr/min} & m &= 1116,8 \text{ kg} & I &= 12,56 \text{ kgm}^2 & f &= 5 \text{ Hz} & & & E &= 6192 \text{ J} \\
 I &=? , E_K &=? & & & & & & & & &
 \end{aligned}$$

1.341. Bakrena kugla polumjera 10 cm vrti se oko osi koja prolazi središtem te učini dva ophoda u sekundi. Koliki rad treba utrošiti da bismo joj kutnu brzinu podvostručili?

$$\begin{aligned}
 r &= 10 \text{ cm} & & & & & E_1 &= \frac{I \cdot \omega_1^2}{2} \\
 \rho &= 8900 \text{ kg/m}^3 & & & & & E_1 &= \frac{0,149 \cdot 12,56^2}{2} \\
 f &= 2 \text{ Hz} & m &= \rho \cdot V & I &= \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2 & \omega_1 &= 2 \cdot \pi \cdot f & E_1 &= 11,75 \text{ J} \\
 \omega_2 &= 2\omega_1 & m &= \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi & I &= \frac{2}{5} \cdot 37,28 \cdot 0,1^2 & \omega_1 &= 12,56 \frac{\text{rad}}{\text{s}} & E_2 &= \frac{I \cdot \omega_2^2}{2} \\
 W &= \Delta E = ? & m &= 8900 \cdot \frac{4}{3} \cdot 0,1^3 \cdot \pi & I &= 0,149 \text{ kgm}^2 & \omega_2 &= 2 \cdot \omega_1 & E_2 &= \frac{0,149 \cdot 25,13^2}{2} \\
 & & m &= 37,28 \text{ kg} & & & \omega_2 &= 2 \cdot 12,56 & E_2 &= 47,06 \text{ J} \\
 & & & & & & \omega_2 &= 25,13 \frac{\text{rad}}{\text{s}} & W &= \Delta E = E_2 - E_1 \\
 & & & & & & & & W &= 47,06 - 11,75 \\
 & & & & & & & & W &= 35,3 \text{ J}
 \end{aligned}$$

1.342. Tane mase 360 kg giba se brzinom 800 m/s i vrti 5250 okr/min. Odredi koji dio ukupne energije gibanja čini energija rotacije. Moment tromosti iznosi 4,9 kgm².

$$\begin{aligned}
 m &= 360 \text{ kg} & f &= \frac{n}{60} & E_K &= \frac{m \cdot v^2}{2} & E_{UK} &= E_K + E_R \\
 v &= 800 \text{ m/s} & f &= \frac{5250}{60} = 87,5 \text{ Hz} & E_K &= \frac{360 \cdot 800^2}{2} & E_{UK} &= 115200000 + 740528 \\
 n &= 5250 \text{ okr/min} & \omega &= 2 \cdot \pi \cdot f & E_K &= 115200000 \text{ J} & E_{UK} &= 115940528 \text{ J} \\
 I &= 4,9 \text{ kgm}^2 & \omega &= 2 \cdot \pi \cdot 87,5 & E_R &= \frac{I \cdot \omega^2}{2} & \frac{E_R}{E_{UK}} &= \frac{740528}{115940528} = 0,0064 \\
 E_R/E_{UK} &=? & \omega &= 549,78 \frac{\text{rad}}{\text{s}} & E_R &= \frac{4,9 \cdot 549,78^2}{2} & \frac{E_R}{E_{UK}} &= 0,64\% \\
 & & & & E_R &= 740528 \text{ J} & &
 \end{aligned}$$

- 1.343. Obruč i puni valjak imaju jednaku masu 2 kg i koturaju se jednakom brzinom 5 m/s. Nađi kinetičke energije obaju tijela.

$$m_1 = m_2 = 2 \text{ kg}$$

$$v_1 = v_2 = 5 \text{ m/s}$$

$$E_{K1}, E_{K2} = ?$$

$$E_{K1} = \frac{I_1 \cdot \omega_1^2}{2} + \frac{m_1 \cdot v_1^2}{2}$$

$$E_{K1} = \frac{m_1 \cdot r_1^2 \cdot \frac{v_1^2}{r_1^2}}{2} + \frac{m_1 \cdot v_1^2}{2}$$

$$E_{K1} = \frac{m_1 \cdot v_1^2}{2} + \frac{m_1 \cdot v_1^2}{2}$$

$$E_{K1} = m_1 \cdot v_1^2$$

$$E_{K1} = 2 \cdot 5^2$$

$$E_{K1} = 50 \text{ J}$$

$$E_{K2} = \frac{I_2 \cdot \omega_2^2}{2} + \frac{m_2 \cdot v_2^2}{2}$$

$$E_{K2} = \frac{\frac{m_2 \cdot r_2^2}{2} \cdot \frac{v_2^2}{r_2^2}}{2} + \frac{m_2 \cdot v_2^2}{2}$$

$$E_{K2} = \frac{m_2 \cdot v_2^2}{4} + \frac{m_2 \cdot v_2^2}{2}$$

$$E_{K2} = \frac{3}{4} \cdot m_2 \cdot v_2^2$$

$$E_{K2} = \frac{3}{4} \cdot 2 \cdot 5^2$$

$$E_{K2} = 37,5 \text{ J}$$

- 1.344. Izračunaj kinetičku energiju valjka promjera 0,3 m, koji se vrti oko svoje osi, ako mu je masa $2 \times 10^3 \text{ kg}$ i učini 200 ophoda u minuti.

$$d = 0,3 \text{ m} \Rightarrow r = 0,15 \text{ m}$$

$$m = 2 \cdot 10^3 \text{ kg}$$

$$n = 200 \frac{\text{okr}}{\text{min}} \Rightarrow f = \frac{n}{60} = \frac{200}{60} = 3,33 \text{ Hz}$$

$$E_K = ?$$

$$I = \frac{m \cdot r^2}{2}$$

$$I = \frac{2000 \cdot 0,15^2}{2}$$

$$I = 22,5 \text{ kgm}^2$$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot 3,33$$

$$\omega = 21 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$E_K = \frac{I \cdot \omega^2}{2}$$

$$E_K = \frac{22,5 \cdot 21^2}{2}$$

$$E_K = 4961,25 \text{ J}$$

- 1.345. Kružna ploča polumjera 1m i mase 196 kg kotrlja se po horizontalnoj površini, pri čemu je brzina njezine osi 4 m/s. Nađi ukupnu energiju gibanja ploče.

$$r = 1 \text{ m}$$

$$m = 196 \text{ kg}$$

$$v = 4 \text{ m/s}$$

$$E_{UK} = ?$$

$$I = \frac{m \cdot r^2}{2}$$

$$I = \frac{196 \cdot 1^2}{2}$$

$$I = 98 \text{ kgm}^2$$

$$\omega = \frac{v}{r}$$

$$\omega = \frac{4}{1}$$

$$\omega = 4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

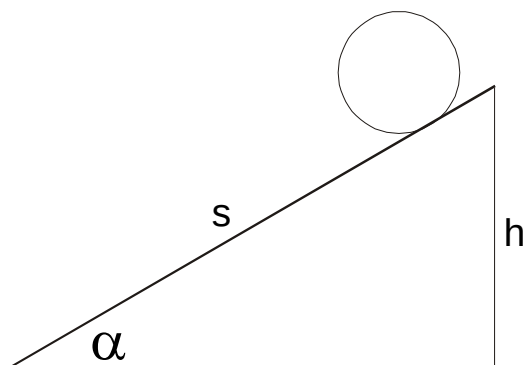
$$E_{UK} = E_R + E_K$$

$$E_{UK} = \frac{I \cdot \omega^2}{2} + \frac{m \cdot v^2}{2}$$

$$E_{UK} = \frac{98 \cdot 4^2}{2} + \frac{196 \cdot 4^2}{2}$$

$$E_{UK} = 2352 \text{ J}$$

- 1.346. Niz kosinu kotrljaju se kugla, valjak i obroč. a) Nađi linijsko ubrzanje središta tih tijela.
b) Kolika je akceleracija ako se tijela skližu niz kosinu bez trenja? Kut nagiba kosine je 30° , a početna brzina tijela 0 ($g = 10 \text{ m/s}^2$).



a) kotrljanje niz kosinu:

$$\alpha = 30^\circ$$

$$g = 10 \text{ m/s}^2$$

$$E_p = E_k + E_R$$

$$m \cdot g \cdot h = \frac{m \cdot v^2}{2} + \frac{I \cdot \omega^2}{2}$$

$$m \cdot g \cdot s \cdot \sin \alpha = \frac{m \cdot 2 \cdot a \cdot s}{2} + \frac{I \cdot \frac{v^2}{r^2}}{2}$$

$$m \cdot g \cdot s \cdot \sin \alpha = m \cdot a \cdot s + \frac{I \cdot \frac{2 \cdot a \cdot s}{2}}{r^2}$$

$$m \cdot g \cdot s \cdot \sin \alpha = m \cdot a \cdot s + \frac{I \cdot 2 \cdot a \cdot s}{2 \cdot r^2}$$

$$m \cdot g \cdot \sin \alpha = a \cdot \left(m + \frac{I}{r^2} \right)$$

$$a = \frac{m \cdot g \cdot \sin \alpha}{m + \frac{I}{r^2}}$$

$$1.) \quad a = \frac{m \cdot g \cdot \sin \alpha}{m + \frac{I}{r^2}} = \frac{g \cdot \sin \alpha}{1 + \frac{I}{m \cdot r^2}} = \frac{10 \cdot \sin 30^\circ}{1 + \frac{2}{5}} = 3,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$2.) \quad a = \frac{m \cdot g \cdot \sin \alpha}{m + \frac{I}{r^2}} = \frac{g \cdot \sin \alpha}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{10 \cdot \sin 30^\circ}{1 + \frac{1}{2}} = 3,3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$3.) \quad a = \frac{m \cdot g \cdot \sin \alpha}{m + \frac{I}{r^2}} = \frac{g \cdot \sin \alpha}{1 + 1} = \frac{10 \cdot \sin 30^\circ}{2} = 2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

b) klizanje niz kosinu:

$$E_p = E_k$$

$$m \cdot g \cdot h = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

$$m \cdot g \cdot s \cdot \sin \alpha = \frac{m \cdot 2 \cdot a \cdot s}{2}$$

$$m \cdot g \cdot s \cdot \sin \alpha = m \cdot a \cdot s$$

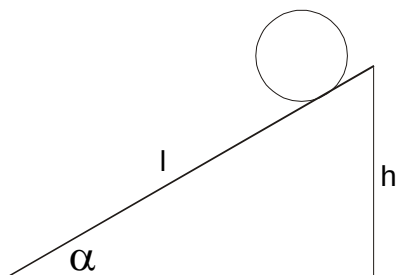
$$a = g \cdot \sin \alpha$$

za sva tri tijela vrijedi:

$$a = 10 \cdot \sin 30^\circ$$

$$a = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

- 1.347. Kugla se kotrlja niz kosinu nagiba 30° . Odredi vrijeme gibanja kugle ako se njezino središte spustilo za 20 cm. Trenje se može zanemariti.



$$\alpha = 30^\circ$$

$$h = 20 \text{ cm}$$

$$t = ?$$

$$\frac{4 \cdot l^2}{t^2} = \frac{10}{7} \cdot g \cdot l \cdot \sin \alpha$$

$$l = \frac{5}{14} \cdot t^2 \cdot g \cdot \sin \alpha$$

$$\frac{a}{2} \cdot t^2 = \frac{5}{14} \cdot t^2 \cdot g \cdot \sin \alpha$$

$$a = \frac{5}{7} \cdot g \cdot \sin \alpha$$

$$a = \frac{5}{7} \cdot 9,81 \cdot \sin 30^\circ$$

$$a = 3,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$E_P = E_K + E_R$$

$$E_P = \frac{m \cdot v^2}{2} + \frac{\omega^2 \cdot I}{2}$$

$$m \cdot g \cdot h = \frac{m \cdot v^2}{2} + \frac{v^2 \cdot \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2}{2}$$

$$g \cdot h = \frac{7}{10} \cdot v^2$$

$$v^2 = \frac{10}{7} \cdot g \cdot h$$

$$h = l \cdot \sin \alpha$$

$$v = a \cdot t, \quad l = \frac{a}{2} \cdot t^2 \Rightarrow v = \frac{2 \cdot l}{t}$$

$$h = l \cdot \sin \alpha \Rightarrow l = \frac{h}{\sin \alpha}$$

$$l = \frac{0,2}{\sin 30^\circ}$$

$$l = 0,4 \text{ m}$$

$$l = \frac{a}{2} \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot l}{a}}$$

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,4}{3,5}}$$

$$t = 0,47 \text{ s}$$

- 1.348. Čovjek stoji na rubu horizontalne kružne ploče koja se jednoliko okreće oko svoje osi zbog ustrajnosti. Masa ploče je $m_1 = 100 \text{ kg}$, masa čovjeka $m_2 = 60 \text{ kg}$, a frekvencija vrtnje 10 okr/min. Kolikom će se brzinom početi okretati ploča ako čovjek s ruba ploče prijeđe u njezino središte?

$$m_P = 100 \text{ kg}$$

$$m_Č = 60 \text{ kg}$$

$$n = 10 \text{ okr/min}$$

$$\omega_2 = ?$$

$$f = \frac{n}{60}$$

$$f = \frac{10}{60} = 0,16 \text{ Hz}$$

$$\omega_1 = 2 \cdot \pi \cdot f$$

$$\omega_1 = 2 \cdot \pi \cdot 0,16$$

$$\omega_1 = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$L_1 = L_2$$

$$(I_Č + I_P) \cdot \omega_1 = (I_Č + I_P) \cdot \omega_2$$

$$\left(m_Č \cdot r^2 + \frac{m_P \cdot r^2}{2} \right) \cdot \omega_1 = \left(m_Č \cdot 0 + \frac{m_P \cdot r^2}{2} \right) \cdot \omega_2$$

$$\omega_2 = \frac{m_Č \cdot r^2 + \frac{m_P \cdot r^2}{2}}{\frac{m_P \cdot r^2}{2}} \cdot \omega_1$$

$$\omega_2 = \frac{m_Č + \frac{m_P}{2}}{\frac{m_P}{2}} \cdot \omega_1$$

$$\omega_2 = \frac{60 + 50}{50} \cdot 1$$

$$\omega_2 = 2,2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

- 1.349. Čovjek stoji u središtu kružne ploče koja se zbog ustrajnosti jednoliko vrti brzinom 0,5 okr/s. Moment tromosti čovjeka s obzirom na os vrtnje jest 2,45 Nms². On ima raširene ruke i u svakoj drži uteg mase 2kg. Utezi su međusobno udaljeni 1,6 m. Kojom brzinom će se okretati ploča ako čovjek spusti ruke tako da su utezi udaljeni samo 0,6 m? Moment ploče može se zanemariti.

$$\omega_1 = 0,5 \frac{\text{okr}}{\text{s}}$$

$$I_{\text{č}} = 2,45 \text{ Nms}^2$$

$$m_1 = m_2 = 2 \text{ kg} \Rightarrow m = 4 \text{ kg}$$

$$d_1 = 1,6 \text{ m} \Rightarrow r_1 = 0,8 \text{ m}$$

$$d_2 = 0,6 \text{ m} \Rightarrow r_2 = 0,3 \text{ m}$$

$$\omega_2 = ?$$

$$I_1 \cdot \omega_1 = I_2 \cdot \omega_2$$

$$(I_{\text{č}} + I_{\text{U}}) \cdot \omega_1 = (I_{\text{č}} + I_{\text{U}}) \cdot \omega_2$$

$$(I_{\text{č}} + m \cdot r_1^2) \cdot \omega_1 = (I_{\text{č}} + m \cdot r_2^2) \cdot \omega_2$$

$$\omega_2 = \frac{(I_{\text{č}} + m \cdot r_1^2)}{I_{\text{č}} + m \cdot r_2^2} \cdot \omega_1$$

$$\omega_2 = \frac{2,45 + 4 \cdot 0,8^2}{2,45 + 4 \cdot 0,3^2} \cdot 0,5$$

$$\omega_2 = 0,89 \frac{\text{okr}}{\text{s}}$$

- 1.350. Kružna ploča polumjera 1 m, mase 200 kg, vrti se oko svoje osi zbog ustrajnosti frekvencijom okr/s. Na rubu ploče stoji čovjek mase 50 kg. Kolikom će se brzinom okretati ploča ako čovjek s ruba ode na pola metra bliže središtu?

$$r_1 = 1 \text{ m}$$

$$m_P = 200 \text{ kg}$$

$$\omega_1 = 1 \text{ okr/s}$$

$$m_{\text{č}} = 50 \text{ kg}$$

$$r_2 = 0,5 \text{ m}$$

$$\omega_2 = ?$$

$$I_1 \cdot \omega_1 = I_2 \cdot \omega_2$$

$$(I_{\text{č}} + I_P) \cdot \omega_1 = (I_{\text{č}} + I_P) \cdot \omega_2$$

$$(m_{\text{č}} \cdot r_1^2 + \frac{m_P \cdot r_1^2}{2}) \cdot \omega_1 = (m_{\text{č}} \cdot r_2^2 + \frac{m_P \cdot r_1^2}{2}) \cdot \omega_2$$

$$\omega_2 = \frac{m_{\text{č}} \cdot r_1^2 + \frac{m_P \cdot r_1^2}{2}}{m_{\text{č}} \cdot r_2^2 + \frac{m_P \cdot r_1^2}{2}} \cdot \omega_1$$

$$\omega_2 = \frac{50 \cdot 1^2 + \frac{200 \cdot 1^2}{2}}{50 \cdot 0,5^2 + \frac{200 \cdot 1^2}{2}} \cdot 1$$

$$\omega_2 = 1,3 \frac{\text{okr}}{\text{s}}$$